



TUGAS AKHIR - SM141501

**APLIKASI ALJABAR MAX-PLUS PADA  
PENJADWALAN FLOWSHOP DENGAN  
MENGUNAKAN MODEL TIMED PETRI NET**

SUSI YANUARSIH  
NRP 1211 100 096

Dosen Pembimbing:  
Dr. Subiono, M.S

JURUSAN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2015



FINAL PROJECT - SM141501

**MAX-PLUS ALGEBRA APPLICATION FOR  
FLOWSHOP SCHEDULING MODELED WITH  
TIMED PETRI NET**

SUSI YANUARSIH  
NRP 1211 100 096

Supervisor:  
Dr. Subiono, M.S

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
Faculty of Mathematics and Natural Sciences  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN

APLIKASI ALJABAR MAX-PLUS PADA  
PENJADWALAN *FLOWSHOP* DENGAN  
MENGUNAKAN MODEL *TIMED PETRI*  
*NET*

*MAX-PLUS ALGEBRA APPLICATION FOR  
FLOWSHOP SCHEDULING MODELED  
WITH TIMED PETRI NET*

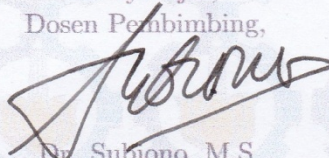
Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada

Bidang Studi Aljabar dan Analisis  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

SUSI YANUARSIH  
NRP. 1211 100 096

Menyetujui,  
Dosen Pembimbing,



Dr. Subiono, M.S

NIP. 19570411 198403 1 001

Mengetahui,

Jurusan Matematika

ITS



Prof. Dr. Eka Apriliani, M.Si  
NIP. 19700801 199102 2 001

Surabaya, Juli 2015

# APLIKASI ALJABAR MAX-PLUS PADA PENJADWALAN *FLOWSHOP* DENGAN MENGUNAKAN MODEL *TIMED PETRI NET*

Nama Mahasiswa : Susi Yanuarsih  
NRP : 1211 100 096  
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS  
Pembimbing : Dr. Subiono, M.S

## Abstrak

*Aljabar Max-Plus merupakan salah satu teknik analisis pengkajian dari sistem event diskret yang mempunyai banyak aplikasi pada teori sistem, Petri net dan teori graph. Salah satu aplikasinya adalah pada penjadwalan sistem produksi. Pada penelitian ini, didesain penjadwalan sistem produksi flowshop. Di dalam penelitian ini dibahas masalah penjadwalan 5 workstation dan 3 job. Dari data yang ada dibuat sinkronisasi antar mesin. Dari sinkronisasi tersebut dicari permutasi urutan job yang optimal, dengan menggunakan algoritma Branch and Bound dengan pendekatan Aljabar Max-Plus. Selanjutnya, dikonstruksi model petri net dan Aljabar Max-Plus untuk menentukan jadwal pemrosesan job di masing - masing mesin. Berdasarkan studi kasus di UKM Rizki Makmur, didapat model dinamik  $X(k) = M \otimes X(k - 1)$ , serta urutan job yang mengoptimalkan makespan (jangka waktu selesainya seluruh job) yang dihasilkan adalah job 2 (pembuatan kusen), job 3 (pembuatan jendela), job 1 (pembuatan pintu) dengan makespan sebesar 170 menit.*

**Kata-kunci:** *Aljabar Max-Plus, Timed Petri Net, Penjadwalan Flowshop.*

# MAX-PLUS ALGEBRA APPLICATION FOR FLOWSHOP SCHEDULING MODELED WITH TIMED PETRI NET

Name : Susi Yanuarsih  
NRP : 1211 100 096  
Department : Mathematics FMIPA-ITS  
Supervisor : Dr. Subiono, M.S

## Abstract

*Max-plus Algebra is one of the engineering assessment analysis of discrete event systems which have many applications on systems theory, Petri net and graph theory. One of its application is production scheduling system. In this research, flowshop production scheduling system is designed. In this research scheduling issues of 5 workstation and 3 job is discussed. From the existing data, synchronization between machines created. From the synchronization will be sought permutation of optimal job sequence, using Branch and Bound Algorithm with Max-Plus Algebra approach. Furthermore, the model is constructed petri net and Max-Plus algebra to determine the schedule of job processing in each machine. Based on case studies in UKM Rizki Makmur, obtained the dynamic model  $X(k) = M \otimes X(k - 1)$ , we can get the job sequence that optimizes makespan (term of completion of the entire job), the sequence generated job is a job 2 (manufacture frames), job 3 (manufacture of windows), job 1 (manufacture of doors) with makespan of 170 minutes.*

**Key-words:** *Max-Plus Algebra, Timed Petri Net, Flowshop Scedhuling*

## KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, petunjuk serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

### **"APLIKASI ALJABAR MAX-PLUS PADA PENJADWALAN FLOWSHOP DENGAN MENGUNAKAN MODEL TIMED PETRI NET"**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan fasilitas dalam penyelesaian tugas akhir.
2. Bapak Dr. Subiono, M.S selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Ibu Sunarsini, S.Si., M.Si., Bapak Drs. Sentot Didik S., M.Si., Ibu Dian Winda, M.Si., dan Bapak Kistosil Fahim, M.Si. selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tugas Akhir ini.

4. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. selaku koordinator Tugas Akhir.
5. Bapak Prof.Dr.M.Isa Irawan, M.T. selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis juga menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Juli 2015

Penulis



## **Special Thank's To**

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Kedua orang tua yang telah memberi dukungan kepada penulis sejak kecil hingga kini, serta keluarga besar di rumah yang selalu menjadi motivasi bagi penulis untuk segera menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Bapak - ibu guru penulis dari sejak SD - SMA, bapak - ibu pembina di asrama Bina Siswa SMA Plus Cisarua, terimakasih atas ilmu dan doa yang diberikan.
2. Keluarga selamanya, Kabinet Kolaborasi Harmoni 2014/2015 terutama keluarga Keilmuan, Keluarga besar Kos Qur'an, Keluarga Besar Ibnu Muqlah, FRUITS 11, terimakasih untuk dukungan, doa, dan banyak pelajaran yang kalian berikan.
3. Galaksi Andromeda 142, terimakasih atas doa - doa yang kalian berikan. We are family forever ever.
4. Menara 11 dan Keluarga Besar HIMATIKA, terimakasih atas dukungan dan semangat yang diberikan selama penulis di Surabaya.
5. Trio, Mas Fahim, Mas Syifaul, dan Mas Satria yang telah banyak membantu penulis dalam hal akademik maupun penyelesaian tugas akhir ini.
6. Semua pihak yang tak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini.



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
BAB I     PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan .....	4
1.5 Manfaat .....	4
1.6 Sistematika Penulisan .....	4
BAB II     TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Aljabar Max-Plus .....	7
2.1.1 Vektor dan Matriks dalam Aljabar Max-Plus .....	8
2.1.2 Graf Berarah dalam Aljabar Max-Plus	9
2.1.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen dalam Aljabar Max-Plus .....	11
2.1.4 Eigenmode .....	13
2.2 Masalah Optimasi dalam Aljabar Max-Plus .	17

2.2.1	Masalah Optimasi dalam $\mathcal{T}_{2 \times 2}(\mathbb{R}_\varepsilon)$ . . . .	18
2.2.2	Masalah Optimasi dalam $\mathcal{T}_{3 \times 3}(\mathbb{R}_\varepsilon)$ . . . .	19
2.3	Petri net . . . . .	24
2.3.1	Transisi Enabling dan Firing . . . . .	25
2.4	Penjadwalan Sistem Produksi . . . . .	26
BAB III	METODE PENELITIAN . . . . .	33
3.1	Studi Literatur . . . . .	33
3.2	Sinkronisasi Mesin . . . . .	33
3.3	Konstruksi Model . . . . .	33
3.4	Penarikan Kesimpulan . . . . .	34
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN . . . . .	35
4.1	Sinkronisasi Mesin, Penentuan Urutan Job Optimal, dan Besarnya Makespan . . . . .	35
4.1.1	Sinkronisasi Mesin . . . . .	36
4.1.2	Penentuan Urutan Optimal dengan Menggunakan Algoritma Branch dan Bound . . . . .	48
4.2	Konstruksi Model . . . . .	58
BAB V	PENUTUP . . . . .	77
5.1	Kesimpulan . . . . .	77
5.2	Saran . . . . .	78
DAFTAR PUSTAKA		79
LAMPIRAN A	Biodata Penulis . . . . .	81

## DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Keterangan Model Timed Petri Net 3 <i>job</i> 5 mesin . . . . .	60
Tabel 4.2	Contoh kasus waktu pemrosesan 3 <i>job</i> pada 5 mesin . . . . .	66
Tabel 4.3	Jadwal Mulainya Pemrosesan Job pada Contoh 4.1 Menggunakan (4.15) untuk 3 Siklus Produksi . . . . .	74

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Pola Aliran Kerja <i>Job Shop</i> . . . . .	27
Gambar 2.2	Pola Alir <i>Flow Shop</i> Murni . . . . .	28
Gambar 2.3	Pola Alir <i>Flow Shop</i> Umum . . . . .	29
Gambar 2.4	Diagram flowshop 3 <i>job</i> pada 5 mesin di UKM Rizki Makmur . . . . .	31
Gambar 4.1	Sinkronisasi antar mesin . . . . .	37
Gambar 4.2	Model Timed Petri Net 3 <i>job</i> 5 mesin . .	59
Gambar 4.3	Representasi graph dari matriks 3 <i>job</i> 5 mesin . . . . .	65
Gambar 4.4	Gant Chart jadwal produksi 3 <i>job</i> 5 mesin pada Contoh 4.1 . . . . .	75

# BAB I

## PENDAHULUAN

Pada bab ini diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, asumsi, tujuan dan manfaat serta sistematika penulisan tugas akhir ini.

### 1.1 Latar Belakang

Untuk memulai suatu produksi, perusahaan yang bergerak di bidang industri haruslah mempunyai rencana produksi (*Production Schedule*). Salah satu kendala dalam keterlambatan penyelesaian proses produksi adalah metode penjadwalan. Metode penjadwalan memiliki peranan yang sangat penting untuk optimalisasi sumber daya yang digunakan agar mendapatkan hasil yang optimum. Penjadwalan produksi diupayakan untuk mendapatkan keefektifan kerja pada setiap *workstation*, agar tidak terjadi penumpukan *job* sehingga dapat mengurangi waktu *idle* atau waktu menunggu proses pengerjaan berikutnya.

Dengan penjadwalan produksi yang baik, mesin - mesin yang digunakan dapat dioperasikan sesuai kapasitas yang dimiliki dan memperkecil kemungkinan timbulnya waktu yang tidak produktif dari mesin - mesin yang digunakan, meskipun belum tentu mesin tersebut dioperasikan sebatas kapasitas maksimum, namun demikian setidaknya dengan suatu penjadwalan produksi yang baik maka hasil produksi relatif akan lebih tinggi.

Penjadwalan produksi berfungsi untuk membuat agar arus produksi dapat berjalan lancar sesuai dengan waktu yang telah direncanakan. Sehingga dapat dikatakan bahwa

penjadwalan produksi dilakukan agar mesin - mesin dapat bekerja sesuai dengan kapasitas yang ada dan biaya yang seminimal mungkin, serta kuantitas produk yang diinginkan sesuai waktu yang telah ditentukan[3].

Istilah penjadwalan pada penelitian tugas akhir ini mengacu pada penentuan urutan *job* dan penyusunan jadwal reguler dari waktu mulainya pemrosesan seluruh *job* dalam sistem. Beberapa penelitian sebelumnya telah dilakukan, antara lain dengan menggunakan *Branch dan Bound* [8], *tabu search* [9], *ant colony* [10], algoritma *honey bee* [6], dll.

Aljabar Max-Plus merupakan salah satu teknik analisis pengkajian dari sistem *event* diskret yang mempunyai banyak aplikasi pada teori sistem, Petri net dan teori graph. Selain untuk masalah penjadwalan sistem produksi, Aljabar Max-Plus juga pernah diaplikasikan pada sistem penjadwalan transportasi, model sistem antrian, dan lain - lain. Pada penelitian sebelumnya telah diteliti tentang penggunaan aljabar max-plus untuk menganalisis penjadwalan produksi aliran *flowshop* oleh [5]. Pada penelitian itu, *flowshop* yang diteliti adalah *flowshop* dengan  $n$  *job* 2 mesin[5]. Selain itu juga telah diteliti tentang penggunaan Algoritma Branch dan Bound oleh [8]. Pada penelitian itu, masih digunakan aljabar biasa. Penelitian tugas akhir ini menggunakan Algoritma Branch dan Bound dengan pendekatan aljabar max-plus.

Pada penelitian tugas akhir ini, ditentukan urutan yang meminimumkan waktu tunggu pemrosesan *job* di setiap mesin sehingga *makespan* (jangka waktu selesainya seluruh *job*) yang dihasilkan lebih minimum dengan menggunakan algoritma Branch dan Bound dengan pendekatan aljabar max-plus. Selanjutnya dikonstruksi model dari sistem produksi dengan menggunakan *timed petri - net*. Berikutnya dianalisis desain penjadwalan sistem produksi dengan menggunakan aljabar max-plus.

## 1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas diambil rumusan masalah yaitu:

1. Bagaimana menentukan urutan job yang meminimumkan waktu tunggu pemrosesan job di setiap mesin dengan menggunakan algoritma Branch dan Bound dengan pendekatan aljabar max-plus?
2. Bagaimana model *Timed Petri Net* dari sistem produksi *flowshop 3 job* pada 5 mesin?
3. Bagaimana menentukan desain penjadwalan sistem produksi dengan menggunakan aljabar max-plus?

## 1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penelitian tugas akhir ini adalah:

1. Model sistem produksi yang digunakan adalah model *flowshop* umum, dimana semua *job* melewati mesin yang sama dan urutan yang sama, namun ada *job* yang melewati mesin tertentu .
2. Lamanya waktu pemrosesan masing - masing job pada setiap proses sudah diketahui tetap.
3. Tidak diperbolehkan *pre-emption*, yaitu menghentikan suatu *job* yang sedang diproses pada suatu mesin dan memproses *job* yang lain pada mesin tersebut.
4. Pada suatu waktu, satu mesin hanya dapat memproses satu job.
5. Model yang digunakan diambil dari salah satu UKM Rizki Makmur di daerah Kenjeran.



## 1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan desain penjadwalan *job* pada sistem produksi *flowshop* 3 job pada 5 mesin sehingga menghasilkan makespan yang minimum.

## 1.5 Manfaat

Adapun manfaat dari hasil penelitian ini adalah analisa pemodelan dan penjadwalan yang digunakan dapat dikembangkan untuk penelitian lebih lanjut, sehingga pada penelitian berikutnya dapat lebih memberi manfaat bagi pihak yang membutuhkan.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

### 1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

### 2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab II diuraikan mengenai materi-materi yang mendukung proses pengerjaan Tugas Akhir, antara lain Aljabar Max-Plus, Optimasi dalam Aljabar Max-Plus, Petri Net, serta Pengenalan tentang Sistem Produksi.

### 3. BAB III METODE PENELITIAN

Dalam bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, sinkronisasi antar mesin yang dilanjutkan dengan penentuan urutan yang mengoptimalkan makespan. Selanjutnya adalah mengkonstruksi model petri net, serta model aljabar

maxplus untuk menentukan jadwal. Tahap terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan.

#### 4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas secara detail mengenai sinkronisasi antar mesin yang dilanjutkan dengan penentuan urutan yang mengoptimalkan makespan, model petri net, serta model aljabar maxplus untuk menentukan jadwal beserta penjelasan mengenai hasil yang diperoleh.

#### 5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini disajikan beberapa teori dan metode yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini. Landasan teori yang dikaji utamanya adalah aljabar max-plus, *timed petri net*, dan penjadwalan produksi.

### 2.1 Aljabar Max-Plus

Sebelum membahas mengenai aljabar max-plus lebih jauh, terlebih dahulu berikut ini diberikan definisi struktur aljabar max-plus.

**Definisi 2.1.1.**[1]

*Aljabar Max-Plus didefinisikan sebagai  $\mathbb{R}_{max} = (\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$  dengan  $\mathbb{R}_\varepsilon \stackrel{def}{=} \mathbb{R} \cup \varepsilon$  dimana  $\mathbb{R}$  merupakan himpunan semua bilangan real dan  $\varepsilon \stackrel{def}{=} -\infty$ . Operasi yang digunakan dalam aljabar max-plus adalah :*

$\forall x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$

$$x \oplus y \stackrel{def}{=} \max\{x, y\} \text{ dan } x \otimes y \stackrel{def}{=} x + y \quad (2.1)$$

Adapun elemen nol dan elemen satuan dalam aljabar max-plus adalah  $\varepsilon = -\infty$  dan  $e = 0$ , yang memenuhi

$$\varepsilon \oplus x = x \oplus \varepsilon = x, \forall x \in \mathbb{R}_\varepsilon \quad (2.2)$$

$$e \otimes x = x \otimes e = x, \forall x \in \mathbb{R}_\varepsilon \quad (2.3)$$

Untuk selanjutnya dijelaskan tentang operasi pangkat dalam aljabar max-plus, untuk setiap  $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$  dan untuk semua  $n \in \mathbb{N}$ , dengan  $\mathbb{N}$  merupakan himpunan bilangan asli digabung dengan himpunan bilangan nol

$$x^{\otimes n} = \begin{cases} e = 0, & \text{untuk } n = 0 \\ \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_n = \underbrace{x + x + \dots + x}_n = n \times x, & \text{untuk } n \neq 0 \end{cases}$$

### 2.1.1 Vektor dan Matriks dalam Aljabar Max-Plus

Himpunan matriks ukuran  $n \times m$  dalam aljabar max-plus dinotasikan oleh  $\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$ , dimana  $n, m \in \mathbb{N}$  dan didefinisikan  $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ . Misalkan  $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$ , maka elemen-elemen  $A$  pada baris ke -  $i$  dan kolom ke -  $j$  dinotasikan oleh  $a_{i,j}$  atau  $[A]_{i,j}$  untuk  $i \in \underline{n}$  dan  $j \in \underline{m}$ . Berikut ini adalah penulisan matriks  $A$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Penjumlahan matriks  $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$  yang dinotasikan oleh  $A \oplus B$  didefinisikan oleh

$$[A \oplus B]_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} = \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\}$$

Adapun perkalian skalar  $\alpha \in \mathbb{R}_\varepsilon$  dengan matriks  $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$  pada Aljabar max-plus didefinisikan sebagai :

$$[\alpha \otimes A]_{i,j} \stackrel{def}{=} \alpha \otimes a_{i,j}$$

Mengikuti perkalian matriks pada aljabar sebagaimana biasanya, perkalian matriks  $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times p}$  dan  $B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{p \times m}$  pada aljabar max-plus didefinisikan sebagai

$$[A \otimes B]_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^p a_{i,k} \otimes b_{k,j} = \max_{k \in \underline{p}} \{a_{i,k} + b_{k,j}\}$$

### 2.1.2 Graf Berarah dalam Aljabar Max-Plus

Misalkan matriks  $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$  suatu graf berarah dari matriks  $A$  adalah  $\mathcal{G}(A) = (E, V)$ . Graf  $\mathcal{G}(A)$  mempunyai titik sebanyak  $n$ , titik-titik ini biasanya disebut sebagai *vertex*, dan himpunan semua *vertex* dari  $\mathcal{G}(A)$  dinyatakan oleh  $V$ . Suatu garis dari titik  $j$  ke titik  $i$  dinotasikan oleh  $(j, i)$ . Untuk selanjutnya garis ini disebut sebagai *edge*. Himpunan semua *edge* dari graf  $\mathcal{G}(A)$  dinotasikan oleh  $E$ . Bobot dari *edge*  $(j, i)$  adalah nilai dari  $a_{i,j}$  yang dinotasikan oleh  $w(j, i) = a_{i,j}$  dan bila  $a_{i,j} = \varepsilon$ , maka *edge*  $(j, i)$  tidak ada. Suatu barisan *edge*  $(j_1, j_2), (j_2, j_3), \dots, (j_{l-1}, j_l)$  dari suatu graf dinamakan suatu *path*. Suatu *path* dikatakan elementer bila tidak ada titik terjadi dua kali dalam *path* tersebut. Suatu sirkuit adalah *path* elementer tertutup, yaitu  $(j_1, j_2), (j_2, j_3), \dots, (j_{l-1}, j_1)$ . Bobot dari suatu *path*  $p = (j_1, j_2), (j_2, j_3), \dots, (j_{l-1}, j_l)$  dinotasikan oleh  $|p|_w$  dan diberikan oleh  $|p|_w = w(j_1, j_2) + w(j_2, j_3) + \dots + w(j_{l-1}, j_l) = (a_{j_2 j_1} + a_{j_3 j_2} + \dots + a_{j_l j_{l-1}})$ , sedangkan panjang dari *path*  $p$  atau banyaknya *edge* dalam *path*  $p$  dinotasikan oleh  $|p|_l$ . Himpunan semua *path* dari titik  $i$  ke titik  $j$  dengan panjang  $k$  dinotasikan oleh  $P(j, i; k)$ . Bobot rata-rata dari *path*  $p$  didefinisikan sebagai bobot dari  $p$  dibagi oleh banyaknya *edge* dalam *path*  $p$ , yaitu

$$\frac{|p|_w}{|p|_l} = \frac{a_{j_2 j_1} + a_{j_3 j_2} + \dots + a_{j_l j_{l-1}}}{l - 1}$$

Sirkuit rata-rata adalah bobot rata-rata dari suatu sirkuit. Sebarang sirkuit dengan sirkuit rata-rata maksimum dinamakan sirkuit kritis. Suatu graf dikatakan *strongly connected* bila suatu *path* ada untuk setiap titik  $i$  ke setiap

titik  $j$ . Bila graf  $\mathcal{G}(A)$  adalah *strongly connected*, maka matriks  $A$  juga dikatakan *irreducible*.

Graf dan matriks representasi dari graf saling berkaitan satu sama lain. Kondisi dari suatu graf dapat dibaca melalui matriks representasinya, begitu pula sebaliknya. Salah satu contoh keterkaitan tersebut adalah panjang dari suatu *path* dalam graf berhubungan dengan pangkat dari matriks representasinya. Berikut diberikan teorema yang menjelaskan bahwa elemen  $[A^{\otimes k}]_{i,j}$  menghasilkan bobot maksimal dari suatu path dengan panjang  $k$  dari titik  $j$  ke titik  $i$ , asalkan suatu *path* ada.

**Teorema 2.1.1**[1]. *Diberikan  $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ . Untuk setiap  $k \geq 1$  berlaku*

$$[A^{\otimes k}]_{i,j} = \max\{|p|_w : p \in P(j, i, k)\},$$

dengan  $[A^{\otimes k}]_{i,j} = \varepsilon$  pada kasus  $P(j, i, k)$  adalah himpunan kosong, yaitu ketika tidak ada path dengan panjang  $k$  dari  $j$  ke  $i$  dalam  $\mathcal{G}(A)$ .

Dari Teorema 2.1.1 didapat, untuk suatu matriks persegi  $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ , matriks  $A^+$  didefinisikan sebagai

$$A^+ \stackrel{def}{=} \bigotimes_{i=1}^{\infty} A^{\otimes i} \quad (2.4)$$

Catatan bahwa, elemen  $[A^{\otimes k}]_{i,j}$  adalah bobot maksimum dari semua path dengan panjang  $k$  dari titik  $j$  ke titik  $i$ . Jadi elemen  $[A^+]_{i,j}$  adalah bobot maksimum dari path-path dengan panjang sebarang dari titik  $j$  ke titik  $i$ , sehingga didapat

$$[A^+]_{i,j} = \max\{[A^{\otimes k}]_{i,j} | k \geq 1\}.$$

Perhatikan bahwa dalam Persamaan (2.4) matriks pangkat  $A^{\otimes i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, +\infty$ . Berikut ini diberikan suatu teorema mengenai  $A^+$  dengan matriks pangkat  $A^{\otimes i}$  berhenti untuk

$i = n$  dengan  $n$  adalah ukuran dari matriks  $A$  yaitu banyaknya baris dan banyaknya kolom dari  $A$ .

**Teorema 2.1.2**[1] *Misalkan  $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$  sedemikian hingga setiap sirkuit di  $\mathcal{G}(A)$  mempunyai bobot sirkuit rata-rata kurang atau sama dengan 0. Maka*

$$A^+ = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A^{\otimes i} = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus A^{\otimes n} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}. \quad (2.5)$$

**Teorema 2.1.3**[1] *Misalkan matriks  $A$  berukuran  $n \times n$ . Graf  $\mathcal{G}(A)$  tidak memuat satupun sirkuit bila dan hanya bila  $A^{\otimes k} = \varepsilon(n, n), \forall k \geq n$ .*

### 2.1.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen dalam Aljabar Max-Plus

Tidak jauh berbeda dengan aljabar linier sebagaimana biasanya, pada aljabar max-plus nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 2.1.2**[1]

*Vektor  $v \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$  dengan  $v \neq (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)^T$  dan  $\lambda \in \mathbb{R}$ , disebut vektor eigen dan nilai eigen yang bersesuaian dengan suatu matriks  $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$  jika memenuhi persamaan*

$$A \otimes v = \lambda \otimes v.$$

Algoritma untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks  $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$  dilakukan secara berulang dari persamaan linear

$$x(k+1) = A \otimes x(k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Adapun algoritma untuk mendapatkan nilai eigen sekaligus vektor eigen dari suatu matriks persegi dikenal dengan Algoritma Power, yaitu sebagai berikut:[1]



1. Mulai dari sebarang vektor awal  $x(0) \neq \varepsilon$
2. Iterasi persamaan (2.6) sampai ada bilangan bulat  $p > q \geq 0$  dan bilangan real  $c$  sehingga suatu perilaku periodik terjadi, yaitu  $x(p) = c \otimes x(q)$
3. Hitung nilai eigen  $\lambda = \frac{c}{p-q}$
4. Hitung vektor eigen

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1))$$

**Contoh 2.1** Misalkan diberikan matriks  $A$  sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{dan vektor keadaan awal } x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iterasi Persamaan (2.6) didapat

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad x(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix};$$

dari iterasi di atas dapat dilihat bahwa

$$\begin{array}{ccc} x(2) & = & 4 \otimes x(1) \\ & \downarrow & \\ \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} & = & 4 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dengan demikian didapat  $p = 2, q = 1$  dan  $c = 4$ . Jadi nilai eigen dari matriks  $A$  adalah  $\lambda = \frac{c}{p-q} = \frac{4}{1} = 4$ . Vektor  $v$  dari algoritma Power diberikan oleh

$$\begin{aligned} v &= 4^{1-1} \otimes x(1 + 1 - 1) \\ &= 0 \otimes x(1) \\ v &= x(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dapat diselidiki bahwa  $v$  adalah vektor eigen dari  $A$  untuk nilai eigen  $\lambda = 4$  sebagai berikut:

$$A \otimes v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 4 \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \otimes v$$

#### 2.1.4 Eigenmode

Dalam aplikasi aljabar max-plus, terdapat tiga komponen penting berhubungan dengan matriks, yaitu nilai eigen, vektor eigen, dan eigenmode. Matriks yang dibahas adalah matriks reguler yaitu matriks yang disetiap baris setidaknya memuat satu elemen tidak sama dengan  $\varepsilon$ . Pada bagian ini diberikan pengertian eigenmode sebagaimana definisi berikut.

**Definisi 2.1.3**[1]

*Suatu pasangan vektor  $(\eta, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  disebut eigenmode tergeneralisasi dari matriks reguler  $A$  jika untuk setiap  $k \geq 0$  memenuhi*

$$A \otimes (k \times \eta + v) = (k + 1) \times \eta + v \quad (2.7)$$

Dalam Persamaan (2.7) ketika  $k = 0$  didapat

$$A \otimes v = \eta + v \quad (2.8)$$

dan bila semua elemen vektor  $\eta$  adalah konstan bernilai  $\lambda \in \mathbb{R}$ , maka Persamaan (2.8) menjadi

$$A \otimes v = \lambda \otimes v \quad (2.9)$$

Dengan demikian  $\lambda$  adalah suatu nilai eigen dari matriks  $A$  yang bersesuaian dengan vektor eigen  $v$ . Dalam hal yang demikian vektor  $\eta$  adalah perluasan nilai eigen dari matriks  $A$ . Vektor  $\eta$  erat kaitannya dengan vektor *cycle mean*. Jadi bila beberapa elemen dari vektor  $\eta$  mempunyai beberapa nilai yang berbeda, maka dipastikan bahwa matriks  $A$  dalam Persamaan (2.7) adalah tereduksi atau ekivalen graf  $\mathcal{G}(A)$  tidak *strongly connected*. Tetapi hal ini tidak berlaku sebaliknya.

Algoritma untuk menentukan eigenmode dari matriks tereduksi reguler adalah sebagai berikut:

**Algoritma 2.1.1**

1. Ambil matriks tereduksi reguler  $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}$ .
2. Tentukan bentuk matriks blok segitiga atas dari matriks  $A$ .
3. Hitung nilai eigen dan vektor eigen dari blok matriks terakhir pada diagonal utama matriks blok segitiga atas dari matriks  $A$ . Misal  $A_{q,q}$ , maka hitung nilai eigen  $\lambda_q = \lambda(A_{q,q})$  dan vektor eigen  $v_q$  yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut. Selanjutnya, ambil  $\xi_q = \lambda_q$  dan  $i = q$ .
4. Hitung nilai eigen  $\lambda_{(i-1)}$  dari matriks  $A_{(i-1),(i-1)}$ .
5. Jika  $\lambda_{(i-1)} > \xi_i$  lanjutkan ke langkah 6, jika tidak ke langkah 7.

6. Ambil  $\xi_{(i-1)} = \lambda_{(i-1)}$  dan hitung vektor  $v_{(i-1)}$  melalui persamaan berikut:

$$\xi_{(i-1)} \otimes v_{(i-1)} = A_{(i-1),(i-1)} \otimes v_{(i-1)} \oplus \bigoplus_{j=i}^q A_{(i-1),j} \otimes v_j.$$

Kemudian, lanjutkan ke langkah 8.

7. Ambil  $\xi_{(i-1)} = \lambda_i$  dan hitung vektor  $v_{i-1}$  melalui persamaan berikut:

$$\lambda_i \otimes v_{(i-1)} = A_{(i-1),(i-1)} \otimes v_{(i-1)} \oplus \bigoplus_{j=i}^q A_{(i-1),j} \otimes v_j.$$

Kemudian, lanjutkan ke langkah 8.

8. Jika  $i - 1 \neq 1$  kembali ke langkah 4, jika tidak maka selesai.

Jadi didapatkan eigenmode tergeneralisasi dari matriks  $A$  adalah pasangan vektor  $(\eta, v)$ , dengan  $\eta = (\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_q)^T$  dan  $v = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_q)^T$ .

**Contoh 2.2**[1] Diberikan matriks tereduksi regular yang memiliki bentuk matriks blok segitiga atas sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \varepsilon & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

dengan

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, A_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, A_{2,2} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 4 \\ 4 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

Berikut dihitung eigenmode dari matriks  $A$  dengan menggunakan Algoritma 2.1.1. Pertama, dilakukan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen untuk  $A_{2,2}$  dengan

menggunakan Algoritma *Power*. Untuk keadaan awal  $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  diperoleh evolusi keadaan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \dots$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks  $A_{2,2}$  adalah  $\lambda_2 = 4$ , dengan vektor eigen yang bersesuaian

$$\begin{aligned} v_2 &= \bigoplus_{i=1} (\lambda^{\otimes(1-i)} \otimes x(i-1)) \\ &= \lambda^{\otimes(0)} \otimes x(0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kemudian diambil  $\xi_2 = \lambda_2 = 4$ . Langkah selanjutnya dihitung nilai eigen dari matriks  $A_{1,1}$ . Dengan menggunakan Algoritma *Power* didapat  $\lambda_1 = 2$ . Karena  $\lambda_1 < \xi_2$ , maka  $\xi_1 = \lambda_2 = 4$ , dan dilakukan perhitungan vektor eigen  $v_1$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_2 \otimes v_1 &= (A_{1,1} \otimes v_1) \oplus (A_{1,2} \otimes v_2) \\ 4 \otimes \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \oplus \left[ \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

dari Persamaan (2.10) diperoleh

$$\begin{aligned} 4 + v_1 &= \max\{3 + v_2, 2\} \\ 4 + v_1 &= 2 \\ v_1 &= -2 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 4 + v_2 &= \max\{1 + v_1, \varepsilon\} \\ 4 + v_2 &= \max\{1 + (-2), \varepsilon\} \\ v_2 &= -5 \end{aligned}$$

Jadi, didapatkan  $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ . Oleh karena itu, pasangan vektor  $(\eta, v)$  dengan  $\eta = (4 \ 4 \ 4 \ 4)^T$  dan  $v = (-2 \ -5 \ 0 \ 0)^T$  adalah eigenmode tergeneralisasi dari matriks tereduksi reguler  $A$  sebab untuk  $k = 0$ , memenuhi:

$$A \otimes (0 \times \eta + v) = (2 \ -1 \ 4 \ 4)^T = 1 \times \eta + v,$$

untuk  $k = 1$ , memenuhi:

$$A \otimes (1 \times \eta + v) = (6 \ 3 \ 8 \ 8)^T = 2 \times \eta + v,$$

dan seterusnya, vektor  $\eta$  dan  $v$  untuk  $k = 0, 1, 2, \dots$  memenuhi

$$A \otimes (k \times \eta + v) = (k + 1) \times \eta + v.$$

## 2.2 Masalah Optimasi dalam Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus memiliki banyak aplikasi, seperti teori sistem, optimal kontrol, teori graph, petri net, dll. Pada penelitian ini, diteliti tentang aplikasi aljabar max-plus pada sistem produksi *flowshop*. Dalam hal ini, aljabar max-plus dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi pada penjadwalan  $n$  job pada  $m$  mesin. Misalkan kita mempunyai  $n$  job  $\{J_x\}; 1 \leq x \leq n$  untuk diproses pada  $m$  mesin. Setiap job harus melewati  $m$  operasi dan untuk operasi job  $x$  pada mesin  $k$  dinotasikan  $O_{x,k}$ . Sedangkan waktu yang dibutuhkan  $O_{x,k}$  adalah  $p_{x,k}$ . *Pre-emption* tidak diperbolehkan dan sebuah mesin hanya dapat memproses satu job pada suatu waktu.

Misalkan matriks  $A$  merupakan matriks segitiga atas berukuran  $m \times m$ , sedemikian hingga  $[A]_{i,j} = \varepsilon; \forall i > j$ . Didefinisikan  $\mathcal{T}_{m \times m}(\mathbb{R}_\varepsilon)$  merupakan himpunan matriks segitiga atas ukuran  $m \times m$  dengan elemen - elemennya di  $\mathbb{R}_\varepsilon$ , dan matriks  $A$  merupakan representasi dari matriks job pada masalah penjadwalan *flowshop*.

### 2.2.1 Masalah Optimasi dalam $\mathcal{T}_{2 \times 2}(\mathbb{R}_\varepsilon)$

Misalkan  $\mathcal{M} = \{M(1), M(2), \dots, M(n)\}$  merupakan himpunan matriks segitiga atas dengan ukuran  $2 \times 2$  dalam aljabar max-plus,  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  berlaku

$$M(i) = \begin{pmatrix} \mu_{1,1}(i) & \mu_{1,2}(i) \\ \varepsilon & \mu_{2,2}(i) \end{pmatrix}$$

dengan  $\mu_{a,b}(i)$  merupakan representasi dari waktu yang dibutuhkan untuk memproses *job*  $i$  dari mesin  $a$  hingga mesin  $b$ .

Kemudian didefinisikan perkalian dua matriks  $M(i)$  dan matriks  $M(i')$  adalah

$$M(i) \otimes M(i') = \begin{pmatrix} \mu_1(i)\mu_1(i') & \mu_1(i)\mu_{1,2}(i') \oplus \mu_{1,2}(i)\mu_2(i') \\ \varepsilon & \mu_2(i)\mu_2(i') \end{pmatrix}$$

Jelas bahwa  $M(i) \otimes M(i') \neq M(i') \otimes M(i)$ , sehingga hasil kali matriks tidak komutatif. Namun karena perkalian elemen matriks pada Aljabar Max-Plus bersifat komutatif,  $\mu_1(i)\mu_1(i') = \mu_1(i')\mu_1(i)$  dan  $\mu_2(i)\mu_2(i') = \mu_2(i')\mu_2(i)$ , maka hanya elemen kanan atas yang bergantung pada urutan perkalian.

Untuk menentukan urutan perkalian optimal, akan ditentukan permutasi  $\sigma$  dari  $n$  *job* sedemikian hingga hasil kali matriks dengan urutan permutasi  $\sigma$  menghasilkan elemen kanan atas yang minimal. Permutasi ini dinotasikan oleh  $\otimes M_2 \parallel M_{1,2}$ .

Urutan optimal untuk  $n$  matriks dapat ditentukan dengan menggunakan Algoritma JG [11]:

- a. Ambil  $U = \{M(i) : \mu_1(i) < \mu_2(i)\}$
- b. Ambil  $V = \{M(i) : \mu_1(i) \geq \mu_2(i)\}$



- c. Misalkan  $U^s$  merupakan himpunan  $U$  yang terurut sedemikian hingga  $\frac{\mu_2(i)}{\mu_{1,2}(i)}$  terurut tidak naik.
- d. Misalkan  $V^s$  merupakan himpunan  $V$  yang terurut sedemikian hingga  $\frac{\mu_1(i)}{\mu_{1,2}(i)}$  terurut tidak turun.
- e.  $\sigma = U^s; V^s$ , *concatenation* atau gabungan terurut dari  $U^s$  dan  $V^s$  merupakan permutasi optimal, dalam hal ini merupakan urutan *job* optimal.

### 2.2.2 Masalah Optimasi dalam $\mathcal{T}_{3 \times 3}(\mathbb{R}_\varepsilon)$

Misalkan  $\mathcal{M} = \{M(1), M(2), \dots, M(n)\}$  merupakan himpunan matriks segitiga atas dengan ukuran  $3 \times 3$  yang didefinisikan oleh,  $\forall i, 1 \leq k \leq n$  berlaku

$$M(k) = \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \mu_{1,2}(k) & \mu_{1,3}(k) \\ \varepsilon & \mu_2(i) & \mu_{2,3}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) \end{pmatrix}$$

Misalkan barisan permutasi dari  $n$  *job* adalah  $\sigma$ , maka matriks permutasi didefinisikan

$$M(\sigma) = \bigotimes_{k=1}^n M(\sigma(k))$$

Akan ditentukan permutasi  $\sigma$  yang meminimumkan nilai elemen kanan atas, yaitu elemen  $\mu_{1,3}(k)$ . Masalah ini dinotasikan oleh  $\otimes M3 || M_{1,3}$ . Untuk menyelesaikannya digunakan Algoritma Branch dan Bound.

### Algoritma Branch dan Bound

Sebuah *node*  $s = (\varsigma_s, \Omega_s, LB(s))$  yang didefinisikan oleh

- Himpunan bagian terurut dari  $\mathcal{M} = \{M(1), M(2), \dots, M(n)\}$  dinotasikan oleh  $\varsigma_s$

- Himpunan matriks *job* yang belum terurutkan, dinotasikan oleh  $\Omega_s$ , yaitu himpunan matriks yang belum masuk dalam  $\varsigma_s$ , atau dapat dituliskan  $\Omega_s = \mathcal{M} \setminus \varsigma_s$
- Lower bound (Batas Bawah) LB(s) merupakan batas bawah dari elemen kanan atas matriks permutasi *job*  $\varsigma_s$

Pada setiap *node*  $s$ , cabang *node*  $s_k$  dibangun oleh  $\Omega_{s_k} = \Omega_s \setminus M(k)$  dan  $\varsigma_{s_k} = \{M(k)\}$  dengan matriks  $M(k)$  merupakan matriks yang sudah dijadwalkan. Selanjutnya pada cabang *node*  $s_k$  mempunyai subcabang lagi, yaitu  $s_{k,l}$  yang dibangun oleh  $\Omega_{s_{k,l}} = \Omega_{s_k} \setminus M(l)$  dan  $\varsigma_{s_{k,l}} = \{M(k), M(l)\}$ . Subcabang akan terus memiliki subcabang hingga  $\Omega_{s_{k,l,\dots}} = \{\}$ . Selanjutnya diimplementasikan algoritma branch dan bound dengan *best-first strategy* seperti langkah-langkah berikut:

1. Masukkan *subnode*  $s_k$  ke dalam antrian  $Q$ .
2. Pilih dari antrian  $Q$  *subnode*  $s_k$  yang mempunyai batas bawah terkecil. Jika batas bawah lebih besar dari batas atas, berhenti. Didapat *makespan* minimum sama dengan batas atas, serta urutan *job* yang meminimumkan *makespan* adalah  $\varsigma_s$  yang berkaitan dengan nilai batas atas tersebut. Jika tidak, lanjutkan ke langkah 3. Jika  $Q$  kosong, berhenti.
3. Bangun cabang dari *subnode*  $s_k$ , kembali ke langkah 1. Jika *subnode*  $s_k$  merupakan akar *node*, hitung batas atasnya, lanjutkan ke langkah 4.
4. Jika batas atas yang baru lebih besar dari batas atas yang disimpan sebelumnya, kembali ke langkah 2. Jika batas atas yang baru lebih besar dari batas atas yang

disimpan sebelumnya, perbarui nilai batas atas, kembali ke langkah 2.

Batas bawah dan batas atas dijelaskan dibawah ini.

### Batas Bawah

Misalkan  $u$  dan  $v$  bilangan bulat dengan  $1 \leq u < v \leq 5$ , dinotasikan  $M^{u,v}(k)$  dengan

$$[M^{u,v}(k)]_{i,j} = \begin{cases} \mu_u(k), \text{ untuk } i = j = u \\ \mu_v(k), \text{ untuk } i = j = v \\ \mu_{u,v}(k), \text{ untuk } i = u \text{ dan } j = v \\ \varepsilon, \text{ untuk } i \text{ dan } j \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

maka  $M(k) \geq M^{u,v}(k)$ .

Dibawah ini dinotasikan  $x \wedge y$  merupakan nilai minimum dari  $x$  dan  $y$ ,  $x \wedge y = (x^{\otimes -1} \oplus y^{\otimes -1})^{\otimes -1} = (x \otimes y)(x \oplus y)^{\otimes -1}$  dan  $\frac{x}{y} = x \otimes y^{\otimes -1}$ , sedangkan  $J^{uv}$  menotasikan permutasi optimal dari  $\otimes M2 || M_{1,2}$  yang berkaitan dengan matriks  $M^{u,v}(k)$ .

**Lemma 2.1.1**[11] *Misalkan  $L(M(k), u, v) \in \mathcal{T}_{3 \times 3}(\mathbb{R}_\varepsilon)$  dengan  $1 \leq u < v \leq 3$  merupakan matriks yang didefinisikan oleh*

$$L(M(k), 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_{1,2}(k)}{\mu_2(k)} & \times \\ \varepsilon & 0 & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix};$$

$$L(M(k), 1, 3) = \begin{pmatrix} 0 & \times & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_3(k)} \\ \varepsilon & \times & \frac{\mu_{2,3}(k)}{\mu_3(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$L(M(k), 2, 3) = \begin{pmatrix} \times & \frac{\mu_{1,2}(k)}{\mu_2(k)} \wedge \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_{2,3}(k)} & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_3(k)} \\ \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{2,3}(k)}{\mu_3(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

dan simbol  $\times$  menunjukkan sembarang nilai di  $\mathbb{R}_\varepsilon$ , maka  $\forall u, v$  dengan  $1 \leq u < v \leq 3$  berlaku  $M \geq L(M(k), u, v) \otimes M^{u,v}(k)$ .

**Bukti**

$$\begin{aligned} L(M(k), 1, 2) \otimes M^{1,2}(k) &= \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \mu_{1,2}(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \mu_2(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k) \\ L(M(k), 1, 3) \otimes M^{1,3}(k) &= \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \varepsilon & \mu_{1,3}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_{2,3}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) \end{pmatrix} \leq M(k) \\ L(M(k), 2, 3) \otimes M^{2,3}(k) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu_{1,2}(k) \wedge \frac{\mu_{1,3}(k)\mu_2(k)}{\mu_{2,3}(k)} & \mu_{1,3}(k) \\ \varepsilon & \mu_2(k) & \mu_{2,3}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) \end{pmatrix} \\ &\leq M(k) \end{aligned}$$

**Lemma 2.1.2**[11] Misalkan  $R(M(k), u, v) \in \mathcal{T}_{33}(\mathbb{R}_\varepsilon)$  dengan  $1 \leq u < v \leq 3$  merupakan matriks yang didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} R(M(k), 1, 2) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_{1,2}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_1(k)} \\ \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_{1,2}(k)} \wedge \frac{\mu_{2,3}(k)}{\mu_2(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix} \\ R(M(k), 1, 3) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_{1,2}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_1(k)} \\ \varepsilon & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}; \\ R(M(k), 2, 3) &= \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{2,3}(k)}{\mu_2(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

maka  $\forall(u, v); 1 \leq u < v \leq 3$ ; berlaku  $M(k) \geq M^{u,v}(k) \otimes R(M(k), u, v)$

### Bukti

$$\begin{aligned}
 M^{1,2}(k) \otimes R(M(k), 1, 2) &= \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \mu_{1,2}(k) & \mu_{1,3}(k) \\ \varepsilon & \mu_2 & \frac{\mu_{1,3}(k)\mu_2(k)}{\mu_{1,2}(k)} \wedge \mu_{2,3}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \\
 &\leq M(k) \\
 M^{1,3}(k) \otimes R(M(k), 1, 3) &= \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \mu_{1,2}(k) & \mu_{1,3}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) \end{pmatrix} \leq M(k) \\
 M^{2,3}(k) \otimes R(M(k), 2, 3) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \mu_2(k) & \mu_{2,3}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) \end{pmatrix} \leq M(k)
 \end{aligned}$$

**Proposisi 2.1.1**[11] Untuk setiap  $(u, v)$  dimana  $1 \leq u < v \leq 3$ , dan untuk sembarang nilai  $i$  dan  $j$  yang tetap, jika dinotasikan  $L_{min}(M, u, v)$  dan  $R_{min}(M, u, v)$  merupakan matriks yang didefinisikan oleh

$$[L_{min}(M, u, v)]_{i,j} = \min_{k=1}^n [L(M(k), u, v)]_{i,j}$$

dan

$$[R_{min}(M, u, v)]_{i,j} = \min_{k=1}^n [R(M(k), u, v)]_{i,j}$$

kemudian batas bawah dari hasil kali  $\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i))$  adalah

$$LB(u, v) = L_{min}(M, u, v) \otimes M^{u,v}(J^{u,v}) \otimes R_{min}(M, u, v)$$

## Bukti

$$\begin{aligned}
\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i)) &= M(\sigma(1)) \otimes \left( \bigotimes_{i=2}^{n-1} M(\sigma(i)) \right) \otimes M(\sigma(n)) \\
\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i)) &\geq (L(M(\sigma(1)), u, v) \otimes M^{u,v}(\sigma(1))) \otimes \left( \bigotimes_{i=2}^{n-1} M(\sigma(i)) \right) \\
&\quad \otimes (M^{u,v}(\sigma(n)) \otimes R(M(\sigma(n)), u, v)) \\
\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i)) &\geq L_{min}(M, u, v) \otimes \left( \bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i)) \right) \otimes R_{min}(M, u, v) \\
\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i)) &\geq L_{min}(M, u, v) \otimes M^{u,v}(J^{uv}) \otimes R_{min}(M, u, v)
\end{aligned}$$

Jika  $C_{max}^{2 \times 2}(J^{u,v})$  merupakan nilai dari elemen kanan atas permutasi yang optimal matriks  $M^{u,v}$  berukuran  $2 \times 2$ , terdapat sepuluh batas bawah untuk nilai kanan atas, yang dinotasikan oleh  $LB^{uv} = [LB(u, v)]_{1,3}$  dan nilai yang paling mendekati untuk mendapatkan batas bawah adalah  $LB^{13}$ .

## Batas Atas

Batas atas dari permutasi  $J^{u,v}$  dinotasikan oleh  $UB^{uv}$ ,

$$\forall(u, v); 1 \leq u < v \leq 3; UB^{uv} = C_{max}^{3 \times 3}(J^{uv})$$

Dimana  $C_{max}^{3 \times 3}(\sigma)$  merupakan nilai dari elemen kanan atas dari hasil kali  $\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i))$ . [11]

## 2.3 Petri net

Petri net ditemukan pada tahun 1962 oleh Carl Adam Petri. Petri net merupakan *Graphical and mathematical modeling tool* yang dapat diaplikasikan pada banyak sistem. Sebagai *graphical tool*, petri net dapat digunakan sebagai

bantuan komunikasi visual semilar dengan *flow chart*, diagram blok, dan *network*. Sebagai tambahan, token dalam petri net digunakan untuk mensimulasikan dinamika sistem. Sebagai suatu *mathematical tool*, dimungkinkan kita men-set up *state equation*, persamaan aljabar, dan model matematika lainnya berkaitan dengan perilaku sistem.

Adapun komponen dari grafik petri net adalah sebagai berikut :

**Place** digambarkan oleh lingkaran. Place dinyatakan sebagai kondisi dari suatu keadaan yang merupakan syarat agar suatu kejadian berlaku.

**Token** digambarkan oleh titik hitam. Token merupakan representasi nilai spesifik pada kondisi misalkan variabel program.

**Transisi** digambarkan oleh kotak. Transisi merupakan kejadian yang merubah nilai kondisi dan objek.

**Arc** merupakan panah yang menghubungkan antara place dan transisi, yang menandakan bahwa objek dirubah oleh kejadian tertentu. [2]

### 2.3.1 Transisi Enabling dan Firing

Perilaku dari beberapa sistem dapat digambarkan dengan *system state* dan perubahan *state*. Untuk mensimulasikan perilaku dinamik dari sistem, suatu *state* atau *marking* dalam petri net dirubah sesuai dengan transisi atau *firing rule* :

1. Transisi  $t$  dikatakan *enable* jika setiap *input place*  $p$  dari  $t$  memiliki *token* sekurang - kurangnya  $w(p, t)$ , dengan  $w(p, t)$  merupakan bobot dari *arc* dari  $p$  ke  $t$ .

2. Suatu transisi yang *enable* boleh (atau tidak) di *fire*, ditandai dengan *bar* atau kotak berwarna merah.
3. *Firing* dari transisi *enable*  $t$  mengakibatkan *token* dari setiap *input place*  $p$  berkurang sejumlah  $w(p, t)$  dan ditambahkan ke setiap *output place*  $q$  sejumlah  $w(q, t)$  dengan  $w(q, t)$  adalah bobot dari *arc* dari  $t$  ke  $q$ . [4]

## 2.4 Penjadwalan Sistem Produksi

Penjadwalan produksi yang baik dalam suatu perusahaan akan memiliki keuntungan:

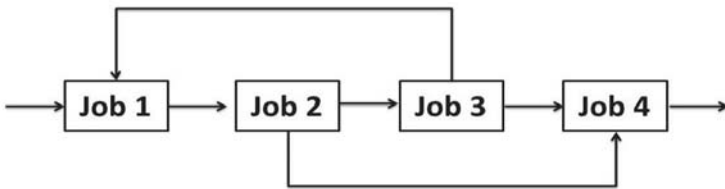
1. Meningkatkan penggunaan sumber daya atau mengurangi waktu tunggu, sehingga total waktu proses dapat berkurang, dan produktivitas dapat meningkat.
2. Mengurangi persediaan barang setengah jadi atau mengurangi sejumlah pekerjaan yang menunggu dalam antrian ketika sumber daya yang ada masih mengerjakan tugas lain.
3. Mengurangi beberapa kelambatan pada pekerjaan yang mempunyai batas waktu penyelesaian sehingga akan meminimasi penalti *cost*.
4. Membantu pengambilan keputusan mengenai perencanaan kapasitas pabrik dan jenis kapasitas yang dibutuhkan sehingga penambahan biaya yang mahal dapat dihindarkan.

Berdasarkan urutan produksi, penjadwalan produksi memiliki dua tipe, yaitu:



### 1. Penjadwalan produksi tipe *Job Shop*

Penjadwalan *job shop* adalah pola alir dari  $n$  *job* melalui  $m$  mesin dengan pola alir sembarang. Selain itu penjadwalan *job shop* dapat berarti setiap *job* dapat dijadwalkan pada satu atau beberapa mesin yang mempunyai pemrosesan sama atau berbeda. Aliran kerja *job shop* adalah sebagai berikut :



Gambar 2.1: Pola Aliran Kerja *Job Shop*

Pada penjadwalan *job shop*, sebuah operasi dinyatakan sebagai triplet  $(i,j,k)$  yang berarti operasi ke- $j$ , *job* ke- $i$ , membutuhkan mesin ke -  $k$  dengan pola *job shop*.

### 2. Penjadwalan produksi tipe *Flow Shop*

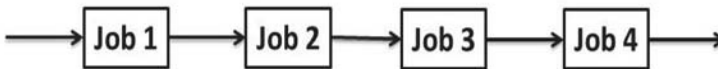
Penjadwalan *flow shop* adalah pola alir dari  $n$  buah *job* yang melalui proses yang sama (searah). Model *flow shop* merupakan sebuah pekerjaan yang dianggap sebagai kumpulan dari operasi - operasi dimana diterapkannya sebuah struktur presenden khusus.

Adapun ciri - ciri penjadwalan *flow shop* adalah adanya aliran kerja yang satu arah dan tertentu. Pada dasarnya ada

beberapa macam pola *flow shop* yaitu :

a. *Flow shop* murni

Kondisi dimana sebuah *job* diharuskan menjalani satu kali proses untuk tiap -tiap tahapan proses. Misalnya, masing - masing *job* melalui mesin 1, kemudian mesin 2, mesin 3 dan seterusnya sampai dengan mesin pada proses yang paling akhir. Dibawah ini diberikan gambaran sistem produksi dengan *flow shop* murni :



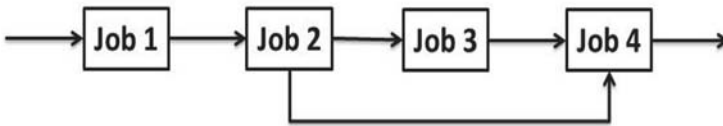
Gambar 2.2: Pola Alir *Flow Shop* Murni

b. *Flow shop* umum

Kondisi dimana sebuah *job* boleh melalui seluruh mesin produksi, dimana mulai awal sampai dengan yang terakhir. Dan selain itu sebuah *job* boleh melalui beberapa mesin tertentu, yang mana mesin tersebut masih berdekatan dengan mesin - mesin lainnya dan masih satu arah lintasannya. Berikut ini contoh sistem produksi dengan pola *flow shop* umum :

Adapun perbedaan antara penjadwalan *job shop* dan penjadwalan *flow shop* adalah :

- *Job shop* menangani variasi produk yang sangat banyak, dengan pola aliran yang berbeda - beda melalui pusat - pusat kerja.
- Peralatan pada *job shop* digunakan secara bersama - sama oleh bermacam - macam order dalam prosesnya,



Gambar 2.3: Pola Alir *Flow Shop* Umum

sedangkan peralatan pada *flow shop* digunakan khusus hanya satu jenis produk.

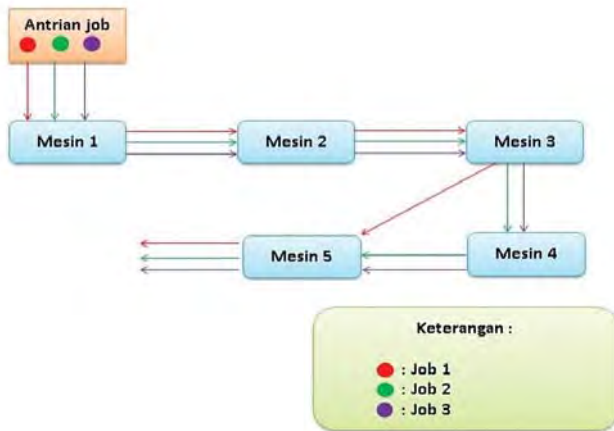
- *Job - job* yang berbeda mungkin ditentukan oleh prioritas yang berbeda pula. Hal ini mengakibatkan order tertentu yang dipilih harus diproses seketika pada saat order tersebut ditugaskan pada satu pusat kerja. Sedangkan pada *flow shop* tidak terjadi permasalahan seperti diatas karena keseragaman *output* yang diproduksi untuk persediaan. Prioritas order *flow shop* dipengaruhi terutama pada pengirimannya dibandingkan tanggal pemrosesan. [3]

Pada penelitian ini, penjadwalan yang dimaksud adalah penentuan urutan *job* dan penyusunan jadwal dari waktu mulainya pemrosesan seluruh *job* pada sistem tersebut, akan disusun jadwal yang reguler dan juga mempunyai *makespan* minimum.

Penyelesaian dalam masalah pengurutan *job* pada aliran produksi *flowshop* dapat diklasifikasikan menjadi tiga. Penyelesaian masalah berbeda antara satu dengan yang lain, disesuaikan dengan jumlah mesin yang mengerjakan [5] , yaitu:

1. Pengurutan *job* untuk  $n$  *job* pada 1 mesin  
 Pengurutan *job* untuk  $n$  *job* pada 1 mesin sangat sederhana dalam pengurutannya dimana  $n$  *job* diproses oleh satu mesin dan semua *job* harus melalui mesin tersebut. Dalam kasus ini, tujuan meminimumkan *makespan* tidak perlu dilakukan karena bagaimanapun urutan *job*nya tidak akan mempegaruhi besar *makespan*nya.
2. Pengurutan *job* untuk  $n$  *job* pada 2 mesin  
 Pada kasus ini kita harus memperhatikan situasi dimana pada saat *job*  $k$  selesai diproses di mesin 1 dan dilanjutkan ke pemrosesan di mesin 2, apakah *job*  $k-1$  sudah selesai diproses atau belum, sehingga mengakibatkan *job*  $k$  menunggu atau tidak. Menentukan urutan seperti ini bukanlah suatu hal yang mudah. Untuk menentukan urutan  $n$  *job* pada 2 mesin bisa menggunakan algoritma Johnson.
3. Pengurutan *job* untuk  $n$  *job* pada  $m$  mesin  
 Sama halnya dengan pengurutan *job* untuk  $n$  *job* pada 2 mesin, kasus ini juga memperhatikan waktu pemrosesan di setiap mesin. Hanya saja, kasus ini lebih kompleks, karena menggunakan mesin yang lebih banyak.

Berikut ini adalah contoh diagram *flowshop* 3 *job* pada 5 mesin yang ada di UKM Rizki Makmur:



Gambar 2.4: Diagram flowshop 3 *job* pada 5 mesin di UKM Rizki Makmur

## BAB III

### METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Metode penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas enam tahap, antara lain: studi literatur, Sinkronisasi Mesin, Konstruksi Model dan penarikan kesimpulan.

#### 3.1 Studi Literatur

Dalam tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi tentang sistem produksi tipe *flowshop*, Aljabar Max-Plus, Timed Petri Net, serta Masalah Optimasi dalam Aljabar Max-Plus. Selain itu juga dilakukan pencarian data terkait jumlah *workstation* dan jumlah *job* yang akan diteliti, beserta waktu yang dibutuhkan untuk memproses masing - masing job di tiap mesin.

#### 3.2 Sinkronisasi Mesin

Pada tahapan ini, diperiksa masalah sinkronisasi akan mesin yang dilanjutkan dengan menentukan urutan permutasi optimal yang meminimumkan makespan. Untuk menentukan urutan permutasi optimal digunakan Algoritma Branch dan Bound yang menggunakan pendekatan Aljabar Max-Plus.

#### 3.3 Konstruksi Model

Pada tahap ini, dikonstruksi model *Timed Petri net* dari sistem produksi aliran *flowshop*. Kemudian dikonstruksi model Aljabar Max-Plus untuk menentukan jadwal reguler dimulainya tiap *job* pada tiap mesin. Pertama akan dicari terlebih dahulu model dinamik dari jadwal sistem, setelah itu

akan dicari nilai eigen dan vektor eigen, atau jika nilai eigen tidak tunggal, akan dicari eigen mode, dan kemudian dibuat jadwal regulernya.

### **3.4 Penarikan Kesimpulan**

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan mengenai penjadwalan sistem produksi aliran *flowshop* 5 mesin 3 *job*.

## BAB IV

### ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai langkah - langkah pembuatan penjadwalan sistem produksi *flowshop*. Yaitu menentukan sinkronisasi mesin dan penentuan urutan *job* optimal serta besarnya makespan dengan menggunakan Aljabar Max-Plus serta *algoritma Branch dan Bound*. Setelah didapatkan urutan *job* optimal, dibuat model sistem menggunakan *Timed Petri Net*, kemudian disusun jadwalnya dengan menggunakan Aljabar Max-Plus.

Misalkan pada aliran produksi *permutation flowshop*, terdapat 3 *job*  $\{J_i\}$  yang akan dijadwalkan pada 5 mesin  $\{M_k\}$ , dengan  $1 \leq i \leq 3$  dan  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ . Masing - masing *job* harus diproses tepat satu kali pada tiap mesin dengan urutan mesin yang sama. Waktu pemrosesan (*processing time*) *job*  $i$  pada mesin  $k$  dinotasikan dengan  $p_{i,k}$ . Sedangkan waktu selesainya (*completion time*) *job*  $i$  pada  $M_k$  dinotasikan  $C_k$ . Sedangkan  $C_{max}$  menyatakan *makespan* jangka waktu selesainya seluruh *job*. Setiap mesin hanya dapat mengerjakan satu operasi dari satu *job* tertentu, dan *pre-emption* tidak diperbolehkan.

#### 4.1 Sinkronisasi Mesin, Penentuan Urutan Job Optimal, dan Besarnya Makespan

Suatu urutan *job* dikatakan optimal jika urutan *job* tersebut mempunyai *makespan* minimum. *Makespan* merupakan salah satu kriteria optimasi yang sering digunakan pada proses produksi yang menggunakan multi mesin seperti



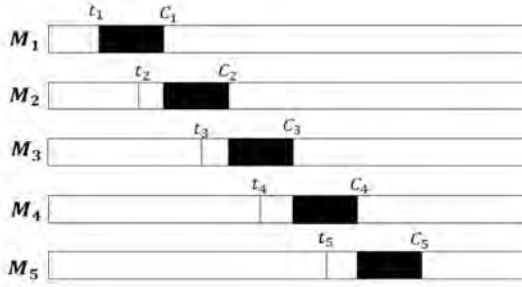
pada flowshop.

Dalam Tugas Akhir ini untuk menentukan urutan *job* optimal akan digunakan *Algoritma Branch dan Bound* dengan pendekatan Aljabar Max-Plus. Dengan menggunakan pendekatan Aljabar Max-Plus, akan lebih banyak informasi yang diperoleh. Informasi tersebut digunakan untuk menyusun suatu jadwal reguler dan optimal dari waktu mulainya pemrosesan masing - masing *job* untuk siklus produksi yang ke- $k$  dengan  $k = 1, 2, \dots$

#### 4.1.1 Sinkronisasi Mesin

Aliran produksi *flowshop* dapat dipandang sebagai sistem *event* diskrit dimana mulainya pemrosesan *job*  $J_i$  pada mesin  $M_k$  bergantung pada selesainya *job*  $J_{i-1}$  pada mesin tersebut dan juga bergantung pada selesainya pemrosesan *job*  $J_i$  pada mesin sebelumnya ( $M_{k-1}$ ). Oleh karena itu, pada kasus ini harus dilakukan sinkronisasi antar mesin.

Saat mulainya pemrosesan *job*  $J_i$  pada mesin  $M_k$  merupakan maksimum dari selesainya *job*  $J_{i-1}$  pada mesin  $M_k$  dan selesainya *job*  $J_i$  pada mesin  $M_{k-1}$ . Sedangkan selesainya *job*  $J_i$  pada mesin  $M_k$  merupakan maksimum dari selesainya *job*  $J_{i-1}$  pada mesin  $M_k$  dan selesainya pemrosesan *job*  $J_i$  pada mesin  $M_{k-1}$  masing - masing ditambah waktu pemrosesan  $p_{i,k}$ .



Gambar 4.1: Sinkronisasi antar mesin

Masalah pada aliran produksi *flowshop* dengan 3 *job* 5 mesin untuk meminimumkan *makespan* dengan konstrain *permutation* dinotasikan dengan  $F5|prmu|C_{max}$ . Gambar 4.1 mengilustrasikan sinkronisasi antarmesin pada  $F5|prmu|C_{max}$ , yaitu untuk  $k$  yang tetap,  $C_{[i],k}$  menyatakan waktu selesainya *job*  $i$  pada  $M_k$  dan  $p_{i,k}$  menyatakan waktu pemrosesannya dengan  $1 \leq i \leq n$  dan  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ . Sedangkan  $t_k$  menyatakan waktu selesainya *job* posisi urutan sebelumnya pada  $M_k$ .

Dari Gambar (4.1) dapat dilihat bahwa waktu selesainya *job*  $i$  pada  $M_1$  adalah

$$C_1 = t_1 + p_1$$

atau dituliskan dalam Aljabar Max-Plus

$$C_{[i],1} = C_{[i-1],1} \otimes p_{i,1} \quad (4.1)$$

Sedangkan waktu selesainya *job* posisi ke- $i$  pada  $M_2$  adalah

$$C_2 = \max(t_2, t_1 + p_1) + p_2 = \max(t_2, C_1) + p_2$$

atau dituliskan dalam Aljabar Max-Plus

$$\begin{aligned} C_{[i],2} &= (C_{[i-1],2} \oplus C_{[i],2}) \otimes p_{i,2} \\ &= (C_{[i-2],2} \oplus (C_{[i-1],1} \otimes p_{[i],1}) \otimes p_{i,2}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sehingga waktu selesainya *job* posisi ke-*i* pada  $M_3, M_4, M_5$  dalam notasi Aljabar Max-Plus adalah

$$\begin{aligned} C_{[i],3} &= (C_{[i-1],3} \oplus C_{[i],2}) \otimes p_{i,3} \\ &= (C_{[i-1],3} \oplus (C_{[i-1],2} \oplus (C_{[i-1],1} \otimes p_{i,1})) \otimes p_{i,2}) \\ &\quad \otimes p_{i,3} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} C_{[i],4} &= (C_{[i-1],4} \oplus C_{[i],3}) \otimes p_{i,4} \\ &= (C_{[i-1],4} \oplus (C_{[i-1],3} \oplus (C_{[i-1],2} \oplus (C_{[i-1],1} \otimes p_{i,1}) \\ &\quad \otimes p_{i,2}) \otimes p_{i,3})) \otimes p_{i,4} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} C_{[i],5} &= (C_{[i-1],5} \oplus C_{[i],4}) \otimes p_{i,5} \\ &= (C_{[i-1],5} \oplus (C_{[i-1],4} \oplus (C_{[i-1],3} \oplus (C_{[i-1],2} \oplus (C_{[i-1],1} \\ &\quad \otimes p_{i,1}) \otimes p_{i,2}) \otimes p_{i,3}) \otimes p_{i,4})) \otimes p_{i,5} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dari Persamaan (4.1) sampai (4.5) dibentuk persamaan

$$\begin{pmatrix} C_{[i],1} & C_{[i],2} & C_{[i],3} & C_{[i],4} & C_{[i],5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{[i-1],1} & C_{[i-1],2} & C_{[i-1],3} & C_{[i-1],4} & C_{[i-1],5} \end{pmatrix}$$

$$\otimes \begin{pmatrix} p_{i,1} & p_{i,1}p_{i,2} & p_{i,1}p_{i,2}p_{i,3} & A & B \\ \varepsilon & p_{i,2} & p_{i,2}p_{i,3} & p_{i,2}p_{i,3}p_{i,4} & C \\ \varepsilon & \varepsilon & p_{i,3} & p_{i,3}p_{i,4} & p_{i,3}p_{i,4}p_{i,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & p_{i,4} & p_{i,4}p_{i,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & p_{i,5} \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} A &= p_{i,1}p_{i,2}p_{i,3}p_{i,4} \\ B &= p_{i,1}p_{i,2}p_{i,3}p_{i,4}p_{i,5} \\ C &= p_{i,2}p_{i,3}p_{i,4}p_{i,5} \end{aligned}$$

atau

$$C_{[i]} = C_{[i-1]} \otimes M(J_i) \quad (4.6)$$

dengan  $C_{[i]} = (C_{[i],1} \ C_{[i],2} \ C_{[i],3} \ C_{[i],4} \ C_{[i],5})$ ; dan  $C_{[i-1]} = (C_{[i-1],1} \ C_{[i-1],2} \ C_{[i-1],3} \ C_{[i-1],4} \ C_{[i-1],5})$  dan  $M(J_i)$  merupakan matriks *job*. Misalkan terdapat  $n$  *job* maka terdapat himpunan  $n$  matriks,  $M = \{M(J_1),, M(J_n)\}$ , akan ditentukan permutasi  $\sigma$  (untuk menyatakan urutan yang digunakan pada perkalian matriks) sedemikian hingga perkalian matriks - matriks tersebut optimal.

Untuk menunjukkan  $n$  matriks *job* yang akan dikalikan dengan urutan  $\sigma$  digunakan notasi  $M(\sigma(1)), M(\sigma(2)), \dots, M(\sigma(n))$ . Hasil perkalian dari  $n$  matriks dengan urutan tersebut, yang dinotasikan dengan  $\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i))$ , akan ditentukan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & M(\sigma(1)) \otimes M(\sigma(2)) = \\ & \begin{pmatrix} \mu_1(\sigma(1)) & \mu_{1,2}(\sigma(1)) & \mu_{1,3}(\sigma(1)) & \mu_{1,4}(\sigma(1)) & \mu_{1,5}(\sigma(1)) \\ \varepsilon & \mu_2(\sigma(1)) & \mu_{2,3}(\sigma(1)) & \mu_{2,4}(\sigma(1)) & \mu_{2,5}(\sigma(1)) \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(\sigma(1)) & \mu_{3,4}(\sigma(1)) & \mu_{3,5}(\sigma(1)) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_4(\sigma(1)) & \mu_{4,5}(\sigma(1)) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_5(\sigma(1)) \end{pmatrix} \otimes \\ & \begin{pmatrix} \mu_1(\sigma(2)) & \mu_{1,2}(\sigma(2)) & \mu_{1,3}(\sigma(2)) & \mu_{1,4}(\sigma(2)) & \mu_{1,5}(\sigma(2)) \\ \varepsilon & \mu_2(\sigma(2)) & \mu_{2,3}(\sigma(2)) & \mu_{2,4}(\sigma(2)) & \mu_{2,5}(\sigma(2)) \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(\sigma(2)) & \mu_{3,4}(\sigma(2)) & \mu_{3,5}(\sigma(2)) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_4(\sigma(2)) & \mu_{4,5}(\sigma(2)) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_5(\sigma(2)) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} A & B & D & G & K \\ \varepsilon & C & E & H & L \\ \varepsilon & \varepsilon & F & I & M \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & J & N \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
A &= \mu_1(\sigma(1))\mu_1(\sigma(2)) \\
B &= \mu_1(\sigma(1))\mu_{1,2}(\sigma(2)) \otimes \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_2(\sigma(2)) \\
C &= \mu_2(\sigma(1))\mu_2(\sigma(2)) \\
D &= \mu_1(\sigma(1))\mu_{1,3}(\sigma(2)) \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_{2,3}(\sigma(2)) \\
&\quad \oplus \mu_{1,3}(\sigma(1))\mu_3(\sigma(2)) \\
E &= \mu_2(\sigma(1))\mu_{2,3}(\sigma(2)) \oplus \mu_{2,3}(\sigma(1))\mu_3(\sigma(2)) \\
F &= \mu_3(\sigma(1))\mu_3(\sigma(2)) \\
G &= \mu_1(\sigma(1))\mu_{1,4}(\sigma(2)) \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_{2,4}(\sigma(2)) \\
&\quad \oplus \mu_{1,3}(\sigma(1))\mu_{3,4}(\sigma(2)) \oplus \mu_{1,4}(\sigma(1))\mu_4(\sigma(2)) \\
H &= \mu_2(\sigma(1))\mu_{2,4}(\sigma(2)) \oplus \mu_{2,3}(\sigma(1))\mu_{3,4}(\sigma(2)) \\
&\quad \oplus \mu_{2,4}(\sigma(1))\mu_4(\sigma(2)) \\
I &= \mu_3(\sigma(1))\mu_{3,4}(\sigma(2)) \oplus \mu_{3,4}(\sigma(1))\mu_4(\sigma(2)) \\
J &= \mu_4(\sigma(1))\mu_4(\sigma(2)) \\
K &= \mu_1(\sigma(1))\mu_{1,5}(\sigma(2)) \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_{2,5}(\sigma(2)) \\
&\quad \oplus \mu_{1,3}(\sigma(1))\mu_{3,5}(\sigma(2)) \oplus \mu_{1,4}(\sigma(1))\mu_{4,5}(\sigma(2)) \\
&\quad \oplus \mu_{1,5}(\sigma(1))\mu_5(\sigma(2)) \\
L &= \mu_2(\sigma(1))\mu_{2,5}(\sigma(2)) \oplus \mu_{2,3}(\sigma(1))\mu_{3,5}(\sigma(2)) \\
&\quad \oplus \mu_{2,4}(\sigma(1))\mu_{4,5}(\sigma(2)) \oplus \mu_{2,5}(\sigma(1))\mu_5(\sigma(2)) \\
M &= \mu_3(\sigma(1))\mu_{3,5}(\sigma(2)) \oplus \mu_{3,4}(\sigma(1))\mu_{4,5}(\sigma(2)) \\
&\quad \oplus \mu_{3,5}(\sigma(1))\mu_5(\sigma(2)) \\
N &= \mu_4(\sigma(1))\mu_{4,5}(\sigma(2)) \oplus \mu_{4,5}(\sigma(1))\mu_5(\sigma(2)) \\
O &= \mu_5(\sigma(1))\mu_5(\sigma(2))
\end{aligned}$$

Perkalian tiga matriks dengan urutan  $M(\sigma(1)) \otimes M(\sigma(2)) \otimes M(\sigma(3))$  menghasilkan

$$\begin{aligned}
 M(\sigma(1)) \otimes M(\sigma(2)) \otimes M(\sigma(3)) &= \begin{pmatrix} A & B & D & G & K \\ \varepsilon & C & E & H & L \\ \varepsilon & \varepsilon & F & I & M \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & J & N \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & O \end{pmatrix} \\
 \otimes \begin{pmatrix} \mu_1(\sigma(3)) & \mu_{1,2}(\sigma(3)) & \mu_{1,3}(\sigma(3)) & \mu_{1,4}(\sigma(3)) & \mu_{1,5}(\sigma(3)) \\ \varepsilon & \mu_2(\sigma(3)) & \mu_{2,3}(\sigma(3)) & \mu_{2,4}(\sigma(3)) & \mu_{2,5}(\sigma(3)) \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(\sigma(3)) & \mu_{3,4}(\sigma(3)) & \mu_{3,5}(\sigma(3)) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_4(\sigma(3)) & \mu_{4,5}(\sigma(3)) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_5(\sigma(3)) \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} A' & B' & D' & G' & K' \\ \varepsilon & C' & E' & H' & L' \\ \varepsilon & \varepsilon & F' & I' & M' \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & J' & N' \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & O' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 A' &= \mu_1(\sigma(1))\mu_1(\sigma(2))\mu_1(\sigma(3)) \\
 B' &= \mu_1(\sigma(1))\mu_1(\sigma(2))\mu_{1,2}(\sigma(3)) \oplus \mu_1(\sigma(1))\mu_{1,2}(\sigma(2))\mu_2(\sigma(3)) \\
 &\quad \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_2(\sigma(2))\mu_2(\sigma(3)) \\
 C' &= \mu_2(\sigma(1))\mu_2(\sigma(2))\mu_2(\sigma(3)) \\
 D' &= \mu_1(\sigma(1))\mu_1(\sigma(2))\mu_{1,3}(\sigma(3)) \oplus \mu_1(\sigma(1))\mu_{1,2}(\sigma(2))\mu_{2,3}(\sigma(3)) \\
 &\quad \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_2(\sigma(2))\mu_{2,3}(\sigma(3)) \oplus \mu_1(\sigma(1))\mu_{1,3}(\sigma(2))\mu_3(\sigma(3)) \\
 &\quad \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_{2,3}(\sigma(2))\mu_3(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,3}(\sigma(1))\mu_3(\sigma(2))\mu_3(\sigma(3)) \\
 E' &= \mu_2(\sigma(1))\mu_2(\sigma(2))\mu_{2,3}(\sigma(3)) \oplus \mu_2(\sigma(1))\mu_{2,3}(\sigma(2))\mu_3(\sigma(3)) \\
 &\quad \oplus \mu_{2,3}(\sigma(1))\mu_3(\sigma(2))\mu_3(\sigma(3)) \\
 F' &= \mu_3(\sigma(1))\mu_3(\sigma(2))\mu_3(\sigma(3))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G' &= \mu_1(\sigma(1))\mu_1(\sigma(2))\mu_{1,4}(\sigma(3)) \oplus \mu_1(\sigma(1))\mu_{1,2}(\sigma(2)) \\
&\quad \mu_{2,4}(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_2(\sigma(2))\mu_{2,4}(\sigma(3)) \oplus \mu_1(\sigma(1)) \\
&\quad \mu_{1,3}(\sigma(2))\mu_{3,4}(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_{2,3}(\sigma(2))\mu_{3,4}(\sigma(3)) \\
&\quad \oplus \mu_{1,3}(\sigma(1))\mu_3(\sigma(2))\mu_{3,4}(\sigma(3)) \oplus \mu_1(\sigma(1))\mu_{1,4}(\sigma(2)) \\
&\quad \mu_4(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_{2,4}(\sigma(2))\mu_4(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,3}(\sigma(1)) \\
&\quad \mu_{3,4}(\sigma(2))\mu_4(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,4}(\sigma(1))\mu_4(\sigma(2))\mu_4(\sigma(3)) \\
H' &= \mu_2(\sigma(1))\mu_2(\sigma(2))\mu_{2,4}(\sigma(3)) \oplus \mu_2(\sigma(1))\mu_{2,3}(\sigma(2)) \\
&\quad \mu_{3,4}(\sigma(3)) \oplus \mu_{2,3}(\sigma(1))\mu_3(\sigma(2))\mu_{3,4}(\sigma(3)) \oplus \mu_2(\sigma(1)) \\
&\quad \mu_{2,4}(\sigma(2))\mu_4(\sigma(3)) \oplus \mu_{2,3}(\sigma(1))\mu_{3,4}(\sigma(2))\mu_4(\sigma(3)) \\
&\quad \oplus \mu_{2,4}(\sigma(1))\mu_4(\sigma(2))\mu_4(\sigma(3)) \\
I' &= \mu_3(\sigma(1))\mu_3(\sigma(2))\mu_{3,4}(\sigma(3)) \oplus \mu_3(\sigma(1))\mu_{3,4}(\sigma(2)) \\
&\quad \mu_4(\sigma(3)) \oplus \mu_{3,4}(\sigma(1))\mu_4(\sigma(2))\mu_4(\sigma(3)) \\
J' &= \mu_4(\sigma(1))\mu_4(\sigma(2))\mu_4(\sigma(3)) \\
K' &= \mu_1(\sigma(1))\mu_1(\sigma(2))\mu_{1,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_1(\sigma(1))\mu_{1,2}(\sigma(2)) \\
&\quad \mu_{2,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_2(\sigma(2))\mu_{2,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_1(\sigma(1)) \\
&\quad \mu_{1,3}(\sigma(2))\mu_{3,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_{2,3}(\sigma(2))\mu_{3,5}(\sigma(3)) \\
&\quad \oplus \mu_{1,3}(\sigma(1))\mu_3(\sigma(2))\mu_{3,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_1(\sigma(1))\mu_{1,4}(\sigma(2)) \\
&\quad \mu_{4,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_{2,4}(\sigma(2))\mu_{4,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,3}(\sigma(1)) \\
&\quad \mu_{3,4}(\sigma(2))\mu_{4,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,4}(\sigma(1))\mu_4(\sigma(2))\mu_{4,5}(\sigma(3)) \\
&\quad \oplus \mu_1(\sigma(1))\mu_{1,5}(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,2}(\sigma(1))\mu_{2,5}(\sigma(2)) \\
&\quad \mu_5(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,3}(\sigma(1))\mu_{3,5}(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,4}(\sigma(1)) \\
&\quad \mu_{4,5}(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3)) \oplus \mu_{1,5}(\sigma(1))\mu_5(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3)) \\
L' &= \mu_2(\sigma(1))\mu_2(\sigma(2))\mu_{2,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_2(\sigma(1))\mu_{2,3}(\sigma(2)) \\
&\quad \mu_{3,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_{2,3}(\sigma(1))\mu_3(\sigma(2))\mu_{3,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_2(\sigma(1)) \\
&\quad \mu_{2,4}(\sigma(2))\mu_{4,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_{2,3}(\sigma(1))\mu_{3,4}(\sigma(2))\mu_{4,5}(\sigma(3)) \\
&\quad \oplus \mu_{2,4}(\sigma(1))\mu_4(\sigma(2))\mu_{4,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_2(\sigma(1))\mu_{2,5}(\sigma(2)) \\
&\quad \mu_5(\sigma(3)) \oplus \mu_{2,3}(\sigma(1))\mu_{3,5}(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3)) \oplus \mu_{2,4}(\sigma(1)) \\
&\quad \mu_{4,5}(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3)) \oplus \mu_{2,5}(\sigma(1))\mu_5(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M' &= \mu_3(\sigma(1))\mu_3(\sigma(2))\mu_{3,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_3(\sigma(1))\mu_{3,4}(\sigma(2))\mu_{4,5}(\sigma(3)) \\
&\quad \oplus \mu_{3,4}(\sigma(1))\mu_4(\sigma(2))\mu_{4,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_3(\sigma(1))\mu_{3,5}(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3)) \\
&\quad \oplus \mu_{3,4}(\sigma(1))\mu_{4,5}(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3)) \oplus \mu_{3,5}(\sigma(1))\mu_5(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3)) \\
N' &= \mu_4(\sigma(1))\mu_4(\sigma(2))\mu_{4,5}(\sigma(3)) \oplus \mu_4(\sigma(1))\mu_{4,5}(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3)) \\
&\quad \oplus \mu_{4,5}(\sigma(1))\mu_5(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3)) \\
O' &= \mu_5(\sigma(1))\mu_5(\sigma(2))\mu_5(\sigma(3))
\end{aligned}$$

Misalkan barisan permutasi dari 3 *job* adalah  $\sigma$ , maka matriks permutasi  $M(\sigma)$  didefinisikan

$$M(\sigma) = \bigotimes_{i=1}^3 M(\sigma(i)) \quad (4.7)$$

Elemen kanan atas dari matriks permutasi  $M(\sigma)$  merepresentasikan waktu selesainya *job* posisi terakhir pada  $M_5$ , yang tidak lain adalah *makespan* dari barisan *job* tersebut. Dengan demikian, *makespan* dari suatu barisan permutasi dari 3 *job* dapat dihitung dengan menggunakan persamaan

$$C(\sigma) = (e \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon) \otimes M(\sigma) \quad (4.8)$$

dengan  $C(\sigma) = (C_1(\sigma) \quad C_2(\sigma) \quad C_3(\sigma) \quad C_4(\sigma) \quad C_5(\sigma))$ ,  $C_k(\sigma)$  menyatakan *completion time* pada mesin  $M_k$ , sehingga  $C_5(\sigma)$  merupakan *completion time* dari  $M_5$  sekaligus besarnya *makespan* dari barisan *job*  $\sigma$ .

Dari Persamaan (4.8) terlihat bahwa urutan *job* optimal ditentukan oleh Persamaan (4.7), yaitu ditentukan dari urutan perkalian matriks *job* yang berupa matriks segitiga atas sedemikian hingga  $M(\sigma)$  pada Persamaan (4.7) optimal.

Oleh karena itu, mula - mula dikaji mengenai perkalian matriks segitiga atas pada Aljabar Max-Plus. Dalam hal ini, masing - masing *job* dinyatakan dalam matriks segitiga



atas yang dinamakan matriks *job* dimana elemen - elemennya merupakan waktu pemrosesan masing - masing *job*. Matriks *job* dari *job*  $J_i$  dinyatakan oleh

$$M(J_i) = \begin{pmatrix} p_{i,1} & p_{i,1}p_{i,2} & p_{i,1}p_{i,2}p_{i,3} & P & Q \\ \varepsilon & p_{i,2} & p_{i,2}p_{i,3} & p_{i,2}p_{i,3}p_{i,4} & R \\ \varepsilon & \varepsilon & p_{i,3} & p_{i,3}p_{i,4} & p_{i,3}p_{i,4}p_{i,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & p_{i,4} & p_{i,4}p_{i,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & p_{i,5} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

dengan

$$\begin{aligned} P &= p_{i,1}p_{i,2}p_{i,3}p_{i,4} \\ Q &= p_{i,1}p_{i,2}p_{i,3}p_{i,4}p_{i,5} \\ R &= p_{i,2}p_{i,3}p_{i,4}p_{i,5} \end{aligned}$$

Kemudian urutan *job* optimal ditentukan berdasarkan hasil matriks *job* pada Persamaan (4.7) yang optimal.

Perkalian dua matriks tidak komutatif. Misalkan diberikan dua matriks segitiga atas A dan B berukuran  $5 \times 5$  yang didefinisikan dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ \varepsilon & a_2 & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & a_3 & a_{3,4} & a_{3,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_4 & a_{4,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & b_{1,5} \\ \varepsilon & b_2 & b_{2,3} & b_{2,4} & b_{2,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & b_3 & b_{3,4} & b_{3,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & b_4 & b_{4,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & b_5 \end{pmatrix}$$

Perkalian dua matriks dengan urutan  $A \otimes B$  menghasilkan

$$A \otimes B =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ \varepsilon & a_2 & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & a_3 & a_{3,4} & a_{3,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_4 & a_{4,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & b_{1,5} \\ \varepsilon & b_2 & b_{2,3} & b_{2,4} & b_{2,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & b_3 & b_{3,4} & b_{3,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & b_4 & b_{4,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & b_5 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_{1,2} \oplus a_{1,2} b_2 & P & Q & S \\ \varepsilon & a_2 b_2 & a_2 b_{2,3} \oplus a_{2,3} b_3 & R & T \\ \varepsilon & \varepsilon & a_3 b_3 & a_3 b_{3,4} \oplus a_{3,4} b_4 & U \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_4 b_4 & V \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_5 b_5 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

dengan

$$\begin{aligned} P &= a_1 b_{1,3} \oplus a_{1,2} b_{2,3} \oplus a_{1,3} b_3 \\ Q &= a_1 b_{1,4} \oplus a_{1,2} b_{2,4} \oplus a_{1,4} b_4 \\ R &= a_2 b_{2,4} \oplus a_{2,3} b_{3,4} \oplus a_{2,4} b_4 \\ S &= a_1 b_{1,5} \oplus a_{1,2} b_{2,5} \oplus a_{1,3} b_{3,5} \oplus a_{1,4} b_{4,5} \oplus a_{1,5} b_5 \\ T &= a_2 b_{2,5} \oplus a_{2,3} b_{3,5} \oplus a_{2,4} b_{4,5} \oplus a_{2,5} b_5 \\ U &= a_3 b_{3,5} \oplus a_{3,4} b_{4,5} \oplus a_{3,5} b_5 \\ V &= a_4 b_{4,5} \oplus a_{4,5} b_5 \end{aligned}$$

Sedangkan perkalian dua matriks dengan urutan  $B \otimes A$

menghasilkan

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} b_1 & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & b_{1,5} \\ \varepsilon & b_2 & b_{2,3} & b_{2,4} & b_{2,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & b_3 & b_{3,4} & b_{3,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & b_4 & b_{4,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & b_5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ \varepsilon & a_2 & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & a_3 & a_{3,4} & a_{3,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_4 & a_{4,5} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_5 \end{pmatrix}$$

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_{1,2} \oplus b_{1,2} a_2 & H & I & K \\ \varepsilon & b_2 a_2 & b_2 a_{2,3} \oplus b_{2,3} a_3 & J & L \\ \varepsilon & \varepsilon & b_3 a_3 & b_3 a_{3,4} \oplus b_{3,4} a_4 & M \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & b_4 a_4 & N \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & b_5 a_5 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

dengan

$$\begin{aligned} H &= b_1 a_{1,3} \oplus b_{1,2} a_{2,3} \oplus b_{1,3} a_3 \\ I &= b_1 a_{1,4} \oplus b_{1,2} a_{2,4} \oplus b_{1,4} a_4 \\ J &= b_2 a_{2,4} \oplus b_{2,3} a_{3,4} \oplus b_{2,4} a_4 \\ K &= b_1 a_{1,5} \oplus b_{1,2} a_{2,5} \oplus b_{1,3} a_{3,5} \oplus b_{1,4} a_{4,5} \oplus b_{1,5} a_5 \\ L &= b_2 a_{2,5} \oplus b_{2,3} a_{3,5} \oplus b_{2,4} a_{4,5} \oplus b_{2,5} a_5 \\ M &= b_3 a_{3,5} \oplus b_{3,4} a_{4,5} \oplus b_{3,5} a_5 \\ N &= b_4 a_{4,5} \oplus b_{4,5} a_5 \end{aligned}$$

Jelas bahwa  $A \otimes B \neq B \otimes A$ , perkalian dua matriks tidak komutatif. Seperti yang dijelaskan sebelumnya bahwa besarnya makespan direpresentasikan oleh elemen kanan atas matriks dan bergantung pada urutan perkalian matriks. Berikutnya ditentukan permutasi  $\sigma$  sedemikian

hingga hasil perkalian matriks (dalam urutan  $\sigma$ ) optimal. Dengan kata lain, ditentukan permutasi  $\sigma$  sedemikian hingga hasil perkalian matriks (dalam urutan  $\sigma$ ) pada Persamaan (4.7) meminimumkan elemen kanan atas (elemen yang merepresentasikan besarnya *makespan* pada barisan *job* dengan urutan  $\sigma$ ).

Untuk menentukan permutasi  $\sigma$  tersebut dikaji mengenai optimasi terkait urutan perkalian matriks segitiga atas pada Aljabar Max-Plus yaitu dengan menggunakan algoritma branch dan bound[11].

Misalkan  $\mathcal{M} = M(1), M(2), \dots, M(n)$  merupakan himpunan matriks segitiga ukuran  $5 \times 5$  atas yang didefinisikan oleh  $\forall k, 1 \leq k \leq n$ ;

$$M(k) = \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \mu_{1,2}(k) & \mu_{1,3}(k) & \mu_{1,4}(k) & \mu_{1,5}(k) \\ \varepsilon & \mu_2(k) & \mu_{2,3}(k) & \mu_{2,4}(k) & \mu_{2,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) & \mu_{3,4}(k) & \mu_{3,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_4(k) & \mu_{4,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_5(k) \end{pmatrix}$$

Misalkan barisan permutasi dari  $n$  *job* adalah  $\sigma$ , maka matriks permutasi didefinisikan

$$M(\sigma) = \bigotimes_{k=1}^n M(\sigma(k))$$

Akan ditentukan permutasi  $\sigma$  yang meminimumkan nilai elemen kanan atas, yaitu elemen  $\mu_{1,5}(k)$ . Masalah ini dinotasikan oleh  $\otimes M5 || M_{1,5}$ . Untuk menyelesaikannya digunakan Algoritma Branch dan Bound.

#### 4.1.2 Penentuan Urutan Optimal dengan Menggunakan Algoritma Branch dan Bound

Algoritma Branch dan Bound yang digunakan untuk menentukan urutan *job* optimal pada 5 mesin tidak jauh berbeda dengan menentukan urutan *job* optimal pada 3 mesin seperti yang telah dijelaskan pada Bab II. Hal yang membedakan adalah pencarian batas bawah dan batas atas dari matriks *job*-nya. Adapun batas bawah dan batas atas untuk menentukan urutan *job* optimal pada 5 mesin dijelaskan dibawah ini.

##### Batas Bawah

Misalkan  $u$  dan  $v$  bilangan bulat dengan  $1 \leq u < v \leq 5$ , dinotasikan  $M^{u,v}(k)$  dengan

$$[M^{u,v}(k)]_{i,j} = \begin{cases} \mu_u(k), \text{ untuk } i = j = u \\ \mu_v(k), \text{ untuk } i = j = v \\ \mu_{u,v}(k), \text{ untuk } i = u \text{ dan } j = v \\ \varepsilon, \text{ untuk } i \text{ dan } j \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

maka  $M(k) \geq M^{u,v}(k)$ .

**Lemma 4.1.1.** Misalkan  $L(M(k), u, v) \in \mathcal{T}_{5 \times 5}(\mathbb{R}_{max})$  dengan  $1 \leq u < v \leq 5$  merupakan matriks yang didefinisikan oleh

$$L(M(k), 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_{1,2}(k)}{\mu_2(k)} & \times & \times & \times \\ \varepsilon & 0 & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
L(M(k), 1, 3) &= \begin{pmatrix} 0 & \times & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_3(k)} & \times & \times \\ \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{2,3}(k)}{\mu_3(k)} & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix}; \\
L(M(k), 1, 4) &= \begin{pmatrix} 0 & \times & \times & \frac{\mu_{1,4}(k)}{\mu_4(k)} & \times \\ \varepsilon & \times & \times & \frac{\mu_{2,4}(k)}{\mu_4(k)} & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \times & \frac{\mu_{3,4}(k)}{\mu_4(k)} & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix}; \\
L(M(k), 1, 5) &= \begin{pmatrix} 0 & \times & \times & \times & \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \times & \times & \times & \frac{\mu_{2,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \times & \times & \frac{\mu_{3,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times & \frac{\mu_{4,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}; \\
L(M(k), 2, 3) &= \begin{pmatrix} \times & \frac{\mu_{1,2}(k)}{\mu_2(k)} & \wedge & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_{2,3}(k)} & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_3(k)} & \times & \times \\ \varepsilon & & 0 & & \frac{\mu_{2,3}(k)}{\mu_3(k)} & \times & \times \\ \varepsilon & & \varepsilon & & 0 & \times & \times \\ \varepsilon & & \varepsilon & & \varepsilon & \times & \times \\ \varepsilon & & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix}; \\
L(M(k), 2, 4) &= \begin{pmatrix} \times & \frac{\mu_{1,2}(k)}{\mu_2(k)} & \wedge & \frac{\mu_{1,4}(k)}{\mu_{2,4}(k)} & \times & \frac{\mu_{1,4}(k)}{\mu_4(k)} & \times \\ \varepsilon & & 0 & & \times & \frac{\mu_{2,4}(k)}{\mu_4(k)} & \times \\ \varepsilon & & \varepsilon & & \times & \frac{\mu_{3,4}(k)}{\mu_4(k)} & \times \\ \varepsilon & & \varepsilon & & \varepsilon & 0 & \times \\ \varepsilon & & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(M(k), 2, 5) &= \begin{pmatrix} \times & \frac{\mu_{1,2}(k)}{\mu_2(k)} \wedge \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_{2,5}(k)} & \times & \times & \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & 0 & \times & \times & \frac{\mu_{2,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \times & \times & \frac{\mu_{3,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times & \frac{\mu_{4,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}; \\
L(M(k), 3, 4) &= \begin{pmatrix} \times & \times & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_3(k)} \wedge \frac{\mu_{1,4}(k)}{\mu_{3,4}(k)} & \frac{\mu_{1,4}(k)}{\mu_4(k)} & \times \\ \varepsilon & \times & \frac{\mu_{2,3}(k)}{\mu_3(k)} \wedge \frac{\mu_{2,4}(k)}{\mu_{3,4}(k)} & \frac{\mu_{2,4}(k)}{\mu_4(k)} & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{3,4}(k)}{\mu_4(k)} & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix}; \\
L(M(k), 3, 5) &= \begin{pmatrix} \times & \times & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_3(k)} \wedge \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_{3,5}(k)} & \times & \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \times & \frac{\mu_{2,3}(k)}{\mu_3(k)} \wedge \frac{\mu_{2,5}(k)}{\mu_{3,5}(k)} & \times & \frac{\mu_{2,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \times & \frac{\mu_{3,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times & \frac{\mu_{4,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}; \\
L(M(k), 4, 5) &= \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \frac{\mu_{1,4}(k)}{\mu_4(k)} \wedge \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_{4,5}(k)} & \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \times & \times & \frac{\mu_{2,4}(k)}{\mu_4(k)} \wedge \frac{\mu_{2,5}(k)}{\mu_{4,5}(k)} & \frac{\mu_{2,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \times & \frac{\mu_{3,4}(k)}{\mu_4(k)} \wedge \frac{\mu_{3,5}(k)}{\mu_{4,5}(k)} & \frac{\mu_{3,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{4,5}(k)}{\mu_5(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

dan simbol  $\times$  menunjukkan sembarang nilai di  $\mathbb{R}_\varepsilon$ , maka  $\forall u, v$  dengan  $1 \leq u < v \leq 5$  berlaku  $M(k) \geq L(M(k), u, v) \otimes M^{u,v}(k)$

**Bukti**

$$L(M(k), 1, 2) \otimes M^{1,2}(k) = \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \mu_{1,2}(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \mu_2(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$L(M(k), 1, 3) \otimes M^{1,3}(k) = \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \varepsilon & \mu_{1,3}(k) & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_{2,3}(k) & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$L(M(k), 1, 4) \otimes M^{1,4}(k) = \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{1,4}(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{2,4}(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{3,4}(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_4(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$L(M(k), 1, 5) \otimes M^{1,5}(k) = \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{1,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{2,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{3,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{4,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_5(k) \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$L(M(k), 2, 3) \otimes M^{2,3}(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu_{1,2}(k) \wedge \frac{\mu_{1,3}(k)\mu_2(k)}{\mu_{2,3}(k)} & \mu_{1,3}(k) & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \mu_2(k) & \mu_{2,3}(k) & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$L(M(k), 2, 4) \otimes M^{2,4}(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu_{1,2}(k) \wedge \frac{\mu_{1,4}(k)\mu_2(k)}{\mu_{2,4}(k)} & \varepsilon & \mu_{1,4}(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \mu_2(k) & \varepsilon & \mu_{2,4}(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{3,4}(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_4(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k),$$



$$L(M(k), 2, 5) \otimes M^{2,5}(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu_{1,2}(k) \wedge \frac{\mu_{1,5}(k)\mu_2(k)}{\mu_{2,5}(k)} & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{1,5}(k) \\ \varepsilon & \mu_2(k) & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{2,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{3,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{4,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_5(k) \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$L(M(k), 3, 4) \otimes M^{3,4}(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \mu_{1,3}(k) \wedge \frac{\mu_{1,4}(k)\mu_3(k)}{\mu_{3,4}(k)} & \mu_{1,4}(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_{2,3}(k) \wedge \frac{\mu_{2,4}(k)\mu_3(k)}{\mu_{3,4}(k)} & \mu_{2,4}(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) & \mu_{3,4}(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_4(k) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$L(M(k), 3, 5) \otimes M^{3,5}(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \mu_{1,3}(k) \wedge \frac{\mu_{1,5}(k)\mu_3(k)}{\mu_{3,5}(k)} & \varepsilon & \mu_{1,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_{2,3}(k) \wedge \frac{\mu_{2,5}(k)\mu_3(k)}{\mu_{3,5}(k)} & \varepsilon & \mu_{2,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) & \varepsilon & \mu_{3,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{4,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_5(k) \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$L(M(k), 4, 5) \otimes M^{4,5}(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{1,4}(k) \wedge \frac{\mu_{1,5}(k)\mu_4(k)}{\mu_{4,5}(k)} & \mu_{1,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{2,4}(k) \wedge \frac{\mu_{2,5}(k)\mu_4(k)}{\mu_{4,5}(k)} & \mu_{2,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_{3,4}(k) \wedge \frac{\mu_{3,5}(k)\mu_4(k)}{\mu_{4,5}(k)} & \mu_{3,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_4(k) & \mu_{4,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_5(k) \end{pmatrix} \leq M(k),$$

**Lemma 4.1.2** Misalkan  $R(M(k), u, v) \in \mathcal{T}_{(5 \times 5)}(R_\varepsilon)$  dengan  $1 \leq u < v \leq 5$  merupakan matriks yang didefinisikan oleh

$$R(M(k), 1, 2) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_{1,2}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,4}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_1(k)} \\ \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_{1,2}(k)} \wedge \frac{\mu_{2,3}(k)}{\mu_2(k)} & \frac{\mu_{1,4}(k)}{\mu_{1,2}(k)} \wedge \frac{\mu_{2,4}(k)}{\mu_2(k)} & \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_{1,2}(k)} \wedge \frac{\mu_{2,5}(k)}{\mu_2(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix};$$

$$R(M(k), 1, 3) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_{1,2}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,4}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_1(k)} \\ \varepsilon & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{1,4}(k)}{\mu_{1,3}(k)} \wedge \frac{\mu_{3,4}(k)}{\mu_3(k)} & \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_{1,3}(k)} \wedge \frac{\mu_{3,5}(k)}{\mu_3(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix};$$

$$R(M(k), 1, 4) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_{1,2}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,4}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_1(k)} \\ \varepsilon & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_{1,4}(k)} \wedge \frac{\mu_{4,5}(k)}{\mu_4(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix};$$

$$R(M(k), 1, 5) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_{1,2}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,3}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,4}(k)}{\mu_1(k)} & \frac{\mu_{1,5}(k)}{\mu_1(k)} \\ \varepsilon & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix};$$

$$R(M(k), 2, 3) =$$

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{2,3}(k)}{\mu_2(k)} & \frac{\mu_{2,4}(k)}{\mu_2(k)} & \frac{\mu_{2,5}(k)}{\mu_2(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{2,4}(k)}{\mu_{2,3}(k)} \wedge \frac{\mu_{3,4}(k)}{\mu_3(k)} & \frac{\mu_{2,5}(k)}{\mu_{2,3}(k)} \wedge \frac{\mu_{3,5}(k)}{\mu_3(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix};$$

$$R(M(k), 2, 4) = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{2,3}(k)}{\mu_2(k)} & \frac{\mu_{2,4}(k)}{\mu_2(k)} & \frac{\mu_{2,5}(k)}{\mu_2(k)} \\ \varepsilon & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{2,5}(k)}{\mu_{2,4}(k)} \wedge \frac{\mu_{4,5}(k)}{\mu_4(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix};$$

$$R(M(k), 2, 5) = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{2,3}(k)}{\mu_2(k)} & \frac{\mu_{2,4}(k)}{\mu_2(k)} & \frac{\mu_{2,5}(k)}{\mu_2(k)} \\ \varepsilon & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix};$$

$$R(M(k), 3, 4) = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \times & 0 & \frac{\mu_{3,4}(k)}{\mu_3(k)} & \frac{\mu_{3,5}(k)}{\mu_3(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{3,5}(k)}{\mu_{3,4}(k)} \wedge \frac{\mu_{4,5}(k)}{\mu_4(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times \end{pmatrix};$$

$$R(M(k), 3, 5) = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \times & 0 & \frac{\mu_{3,4}(k)}{\mu_3(k)} & \frac{\mu_{3,5}(k)}{\mu_3(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix};$$

$$R(M(k), 4, 5) = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \times & \times & \times & \times \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \frac{\mu_{4,5}(k)}{\mu_4(k)} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix};$$

maka  $\forall(u, v), 1 \leq u < v \leq 5$  berlaku  $M(k) \geq M^{u,v}(k) \otimes R(M(k), u, v)$ .

## Bukti

$$M^{1,2}(k) \otimes R(M(k), 1, 2) = \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \mu_{1,2}(k) & \mu_{1,3}(k) & \mu_{1,4}(k) & \mu_{1,5}(k) \\ \varepsilon & \mu_2(k) & \frac{\mu_{1,3}(k)\mu_2}{\mu_{1,2}(k)} \wedge \mu_{2,3}(k) & A & B \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$A = \frac{\mu_{1,4}(k)\mu_2(k)}{\mu_{1,2}(k)} \wedge \mu_{2,4}(k)$$

$$B = \frac{\mu_{1,5}(k)\mu_2(k)}{\mu_{1,2}(k)} \wedge \mu_{2,5}(k)$$

$$M^{1,3}(k) \otimes R(M(k), 1, 3) = \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \mu_{1,2}(k) & \mu_{1,3}(k) & \mu_{1,4}(k) & \mu_{1,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) & C & D \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$C = \frac{\mu_{1,4}(k)\mu_3(k)}{\mu_{1,3}(k)} \wedge \mu_{3,4}(k)$$

$$D = \frac{\mu_{1,5}(k)\mu_3(k)}{\mu_{1,3}(k)} \wedge \mu_{3,5}(k)$$

$$M^{1,4}(k) \otimes R(M(k), 1, 4) = \begin{pmatrix} \mu_1(k) & \mu_{1,2}(k) & \mu_{1,3}(k) & \mu_{1,4}(k) & \mu_{1,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_4 & E \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$E = \frac{\mu_{1,5}(k)\mu_4(k)}{\mu_{1,4}(k)} \wedge \mu_{4,5}(k)$$

$$M^{1,5}(k) \otimes R(M(k), 1, 5) =$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1(k) & \mu_{1,2}(k) & \mu_{1,3}(k) & \mu_{1,4}(k) & \mu_{1,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_5(k) \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$M^{2,3}(k) \otimes R(M(k), 2, 3) =$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \mu_2(k) & \mu_{2,3}(k) & \mu_{2,4}(k) & \mu_{2,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) & \frac{\mu_{2,4}(k)\mu_3(k)}{\mu_{2,3}(k)} \wedge \mu_{3,4}(k) & \frac{\mu_{2,5}(k)\mu_3(k)}{\mu_{2,3}(k)} \wedge \mu_{3,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$M^{2,4}(k) \otimes R(M(k), 2, 4) =$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \mu_2(k) & \mu_{2,3}(k) & \mu_{2,4}(k) & \mu_{2,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_4(k) & \frac{\mu_{2,5}(k)\mu_4(k)}{\mu_{2,4}(k)} \wedge \mu_{4,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$M^{2,5}(k) \otimes R(M(k), 2, 5) =$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \mu_2(k) & \mu_{2,3}(k) & \mu_{2,4}(k) & \mu_{2,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_5(k) \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$M^{3,4}(k) \otimes R(M(k), 3, 4) =$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) & \mu_{3,4}(k) & \mu_{3,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_4(k) & \frac{\mu_{3,5}(k)\mu_4(k)}{\mu_{3,4}(k)} \wedge \mu_{4,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \leq M(k),$$

$$\begin{aligned}
M^{3,5}(k) \otimes R(M(k), 3, 5) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \mu_3(k) & \mu_{3,4}(k) & \mu_{3,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_5(k) \end{pmatrix} \\
&\leq M(k), \\
M^{4,5}(k) \otimes R(M(k), 4, 5) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_4(k) & \mu_{4,5}(k) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mu_5(k) \end{pmatrix} \leq M(k),
\end{aligned}$$

**Proposisi**[11] Untuk setiap  $(u, v)$  dimana  $1 \leq u < v \leq 5$ , dan untuk sembarang nilai  $i$  dan  $j$  yang tetap, jika dinotasikan  $L_{\min}(M, u, v)$  dan  $R_{\min}(M, u, v)$  merupakan matriks yang didefinisikan oleh

$$[L_{\min}(M, u, v)]_{i,j} = \min_{k=1}^n [L(M(k), u, v)]_{i,j}$$

dan

$$[R_{\min}(M, u, v)]_{i,j} = \min_{k=1}^n [R(M(k), u, v)]_{i,j}$$

maka batas bawah dari hasil kali  $\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i))$  adalah  $LB(u, v) = L_{\min}(M, u, v) \otimes M^{u,v}(J^{u,v}) \otimes R_{\min}(M, u, v)$ .

**Bukti**

$$\begin{aligned}
\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i)) &= M(\sigma(1)) \otimes \left( \bigotimes_{i=2}^{n-1} M(\sigma(i)) \right) \otimes M(\sigma(n)) \\
\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i)) &\geq (L(M(\sigma(1)), u, v) \otimes M^{u,v}(\sigma(1))) \otimes \left( \bigotimes_{i=2}^{n-1} M(\sigma(i)) \right) \\
&\quad \otimes (M^{u,v}(\sigma(n)) \otimes R(M(\sigma(n)), u, v))
\end{aligned}$$

$$\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i)) \geq L_{min}(M, u, v) \otimes \left( \bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i)) \right) \otimes R_{min}(M, u, v)$$

$$\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i)) \geq L_{min}(M, u, v) \otimes M^{u,v}(J^{uv}) \otimes R_{min}(M, u, v)$$

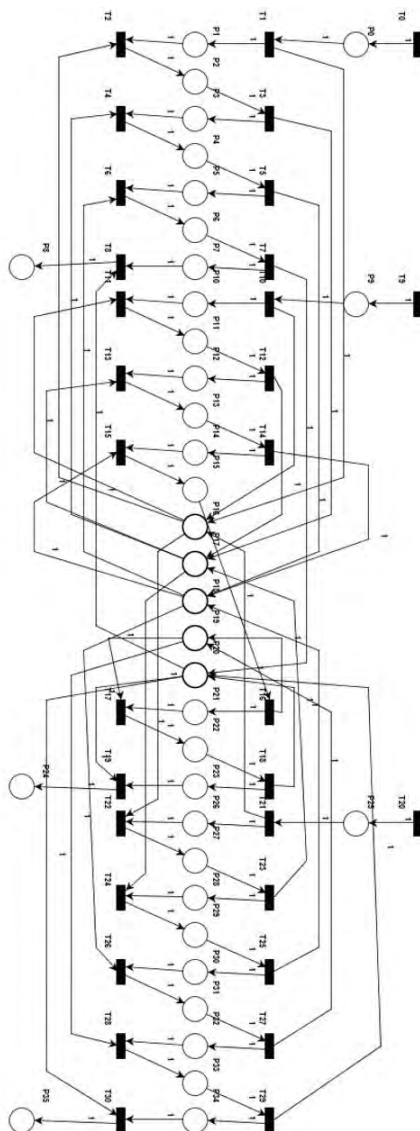
Jika  $C_{max}^{2 \times 2}(J^{u,v})$  merupakan nilai dari elemen kanan atas permutasi yang optimal matriks  $M^{u,v}$  berukuran  $2 \times 2$ , terdapat sepuluh batas bawah untuk nilai kanan atas dalam hal ini adalah elemen pada baris ke-1 kolom ke-5, yang dinotasikan oleh  $LB^{uv} = [LB(u, v)]_{1,5}$  dan nilai yang paling mendekati untuk mendapatkan batas bawah adalah  $LB^{15}$ .

### Batas Atas

Batas atas dari permutasi  $J^{u,v}$  dinotasikan oleh  $UB^{uv}$ ,  $\forall(u, v, 1 \leq u < v \leq 5, UB^{uv} = C_{max}^{5 \times 5}(J^{uv})$ , dimana  $C_{max}^{5 \times 5}(\sigma)$  merupakan nilai dari elemen kanan atas dari hasil kali  $\bigotimes_{i=1}^n M(\sigma(i))$ .

## 4.2 Konstruksi Model

Setelah didapatkan urutan optimal dari *job*, selanjutnya dikonstruksi suatu model *timed petri net* yang merepresentasikan sistem produksi flowshop yang sudah terurut. Dari model *timed petri net* tersebut dibuat suatu model matematis dengan menggunakan terminologi Aljabar Max-Plus.



Gambar 4.2: Model Timed Petri Net 3 *job* 5 mesin



Tabel 4.1: Keterangan Model Timed Petri Net 3 *job* 5 mesin

Variabel	Keterangan
T0	Bahan baku job 1 siap
T1	Job 1 mulai diproses di mesin 1
T2	Job 1 selesai diproses di mesin 1
T3	Job 1 mulai diproses di mesin 2
T4	Job 1 selesai diproses di mesin 2
T5	Job 1 mulai diproses di mesin 3
T6	Job 1 selesai diproses di mesin 3
T7	Job 1 mulai diproses di mesin 5
T8	Job 1 selesai diproses di mesin 5
T9	Bahan baku job 2 siap
T10	Job 2 mulai diproses di mesin 1
T11	Job 2 selesai diproses di mesin 1
T12	Job 2 mulai diproses di mesin 2
T13	Job 2 selesai diproses di mesin 2
T14	Job 2 mulai diproses di mesin 3
T15	Job 2 selesai diproses di mesin 3
T16	Job 2 mulai diproses di mesin 4
T17	Job 2 selesai diproses di mesin 4
T18	Job 2 mulai diproses di mesin 5
T19	Job 2 selesai diproses di mesin 5
T20	Bahan baku job 3 siap
T21	Job 3 mulai diproses di mesin 1
T22	Job 3 selesai diproses di mesin 1
T23	Job 3 mulai diproses di mesin 2
T24	Job 3 selesai diproses di mesin 2
T25	Job 3 mulai diproses di mesin 3
T26	Job 3 selesai diproses di mesin 3
T27	Job 3 mulai diproses di mesin 4
T28	Job 3 selesai diproses di mesin 4
T29	Job 3 mulai diproses di mesin 5
T30	Job 3 selesai diproses di mesin 5

## Keterangan Model Timed Petri Net 3 job 5 mesin

Variabel	Keterangan
P0	Job 1 antri untuk diproses di mesin 1
P1	Job 1 sedang diproses di mesin 1
P2	Job 1 antri untuk diproses di mesin 2
P3	Job 1 sedang diproses di mesin 2
P4	Job 1 antri untuk diproses di mesin 3
P5	Job 1 sedang diproses di mesin 3
P6	Job 1 antri untuk diproses di mesin 5
P7	Job 1 sedang diproses di mesin 5
P8	Job 1 siap
P9	Job 2 antri untuk diproses di mesin 1
P10	Job 2 sedang diproses di mesin 1
P11	Job 2 antri untuk diproses di mesin 2
P12	Job 2 sedang diproses di mesin 2
P13	Job 2 antri untuk diproses di mesin 3
P14	Job 2 sedang diproses di mesin 3
P15	Job 2 antri untuk diproses di mesin 4
P16	mesin 1 sibuk
P17	mesin 2 sibuk
P18	mesin 3 sibuk
P19	mesin 4 sibuk
P20	mesin 5 sibuk
P21	Job 2 sedang diproses di mesin 4
P22	Job 3 antri untuk diproses di mesin 4
P23	Job 2 sedang diproses di mesin 5
P24	Job 2 siap
P25	Job 3 antri untuk diproses di mesin 1
P26	Job 3 sedang diproses di mesin 1
P27	Job 3 antri untuk diproses di mesin 2
P28	Job 3 sedang diproses di mesin 2
P29	Job 3 antri untuk diproses di mesin 3

Keterangan Model Timed Petri Net 3 job 5 mesin

Variabel	Keterangan
P30	Job 3 sedang diproses di mesin 3
P31	Job 3 antri untuk diproses di mesin 4
P32	Job 3 sedang diproses di mesin 4
P33	Job 3 antri untuk diproses di mesin 5
P34	Job 3 sedang diproses di mesin 5
P35	Job 3 siap

Dari model timed petri net yang sudah dikonstruksi berdasarkan urutan job optimal, selanjutnya dikonstruksi model Aljabar Max-Plus untuk memperoleh jadwal reguler dari *flowshop* 5 mesin 3 *job*. Misalkan *job* yang sudah diurutkan dinotasikan  $J'_1, J'_2, \dots, J'_n$  dimana  $J'_i = \sigma(i)$ . Waktu mulainya pemrosesan job  $J'_m$  yang ke -  $k$  pada mesin  $n$  dinotasikan  $x_{m,n}(k)$ . Waktu yang dibutuhkan untuk pemrosesan *job*  $J'_m$  pada mesin  $n$  dinotasikan  $p_{m,n}$ . Maka,

$$\begin{aligned}
x_{1,1}(k) &= p_{3,1} + x_{3,1}(k-1) \\
x_{1,2}(k) &= \max\{(p_{1,1} + x_{1,1}(k)), (p_{3,2} + x_{3,2}(k-1))\} \\
x_{1,3}(k) &= \max\{(p_{1,2} + x_{1,2}(k)), (p_{3,3} + x_{3,3}(k-1))\} \\
x_{1,4}(k) &= \max\{(p_{1,3} + x_{1,3}(k)), (p_{3,4} + x_{3,4}(k-1))\} \\
x_{1,5}(k) &= \max\{(p_{1,4} + x_{1,4}(k)), (p_{3,5} + x_{3,5}(k-1))\} \\
x_{2,1}(k) &= (p_{1,1} + x_{1,1}(k)) \\
x_{2,2}(k) &= \max\{(p_{2,1} + x_{2,1}(k)), (p_{1,2} + x_{1,2}(k-1))\} \\
x_{2,3}(k) &= \max\{(p_{2,2} + x_{2,2}(k)), (p_{1,3} + x_{1,3}(k-1))\} \\
x_{2,4}(k) &= \max\{(p_{2,3} + x_{2,3}(k)), (p_{1,4} + x_{1,4}(k-1))\} \\
x_{2,5}(k) &= \max\{(p_{2,4} + x_{2,4}(k)), (p_{1,5} + x_{1,5}(k-1))\} \\
x_{3,1}(k) &= (p_{2,1} + x_{2,1}(k)) \\
x_{3,2}(k) &= \max\{(p_{3,1} + x_{3,1}(k)), (p_{2,2} + x_{2,2}(k-1))\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{3,3}(k) &= \max\{(p_{3,2} + x_{3,2}(k)), (p_{2,3} + x_{2,3}(k-1))\} \\
x_{3,4}(k) &= \max\{(p_{3,3} + x_{3,3}(k)), (p_{2,4} + x_{2,4}(k-1))\} \\
x_{3,5}(k) &= \max\{(p_{3,4} + x_{3,4}(k)), (p_{2,5} + x_{2,5}(k-1))\}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

dalam Aljabar Max-Plus, Persamaan (4.12) tersebut dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
x_{1,1}(k) &= p_{3,1} \otimes x_{3,1}(k-1) \\
x_{1,2}(k) &= p_{1,1} \otimes x_{1,1}(k) \oplus p_{3,2} \otimes x_{3,2}(k-1) \\
x_{1,3}(k) &= p_{1,2} \otimes x_{1,2}(k) \oplus p_{3,3} \otimes x_{3,3}(k-1) \\
x_{1,4}(k) &= p_{1,3} \otimes x_{1,3}(k) \oplus p_{3,4} \otimes x_{3,4}(k-1) \\
x_{1,5}(k) &= p_{1,4} \otimes x_{1,4}(k) \oplus p_{3,5} \otimes x_{3,5}(k-1) \\
x_{2,1}(k) &= p_{1,1} \otimes x_{1,1}(k-1) \\
x_{2,2}(k) &= p_{2,1} \otimes x_{2,1}(k) \oplus p_{1,2} \otimes x_{1,2}(k-1) \\
x_{2,3}(k) &= p_{2,2} \otimes x_{2,2}(k) \oplus p_{1,3} \otimes x_{1,3}(k-1) \\
x_{2,4}(k) &= p_{2,3} \otimes x_{2,3}(k) \oplus p_{1,4} \otimes x_{1,4}(k-1) \\
x_{2,5}(k) &= p_{2,4} \otimes x_{2,4}(k) \oplus p_{1,5} \otimes x_{1,5}(k-1) \\
x_{3,1}(k) &= p_{2,1} \otimes x_{2,1}(k-1) \\
x_{3,2}(k) &= p_{3,1} \otimes x_{3,1}(k) \oplus p_{2,2} \otimes x_{2,2}(k-1) \\
x_{3,3}(k) &= p_{3,2} \otimes x_{3,2}(k) \oplus p_{2,3} \otimes x_{2,3}(k-1) \\
x_{3,4}(k) &= p_{3,3} \otimes x_{3,3}(k) \oplus p_{2,4} \otimes x_{2,4}(k-1) \\
x_{3,5}(k) &= p_{3,4} \otimes x_{3,4}(k) \oplus p_{2,5} \otimes x_{2,5}(k-1)
\end{aligned}$$

Dengan demikian,  $X(k+1)$  dapat dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi

$$X(k) = AX(k) \oplus BX(k-1) \tag{4.13}$$

dengan

$$X(k) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(k) \\ x_{1,2}(k) \\ x_{1,3}(k) \\ x_{1,4}(k) \\ x_{1,5}(k) \\ x_{2,1}(k) \\ x_{2,2}(k) \\ x_{2,3}(k) \\ x_{2,4}(k) \\ x_{2,5}(k) \\ x_{3,1}(k) \\ x_{3,2}(k) \\ x_{3,3}(k) \\ x_{3,4}(k) \\ x_{3,5}(k) \end{pmatrix}$$

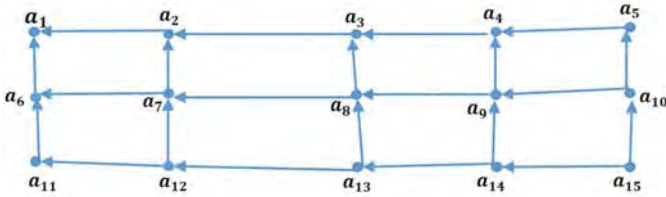
A adalah matriks persegi yang berukuran  $15 \times 15$  dengan input elemen - elemennya adalah  $[A]_{2,1} = p_{1,1}; [A]_{3,2} = p_{1,2}; [A]_{4,3} = p_{1,3}; [A]_{5,4} = p_{1,4}; [A]_{6,1} = p_{1,1}; [A]_{7,2} = p_{1,2}; [A]_{7,6} = p_{2,1}; [A]_{8,3} = p_{1,3}; [A]_{8,7} = p_{2,2}; [A]_{9,4} = p_{1,4}; [A]_{9,8} = p_{2,3}; [A]_{10,5} = p_{1,5}; [A]_{10,9} = p_{2,4}; [A]_{11,6} = p_{2,1}; [A]_{12,7} = p_{2,2}; [A]_{12,11} = p_{3,1}; [A]_{13,8} = p_{2,3}; [A]_{13,12} = p_{3,2}; [A]_{14,9} = p_{2,4}; [A]_{14,13} = p_{3,3}; [A]_{15,10} = p_{2,5}; [A]_{15,14} = p_{3,4}$ ; dan  $\varepsilon$  untuk input elemen lainnya. Sedangkan B adalah matriks persegi berukuran  $15 \times 15$  dengan input elemen - elemennya adalah  $[B]_{1,11} = p_{3,1}; [B]_{2,12} = p_{3,2}; [B]_{3,13} = p_{3,3}; [B]_{4,14} = p_{3,4}; [B]_{5,15} = p_{3,5}$  dan  $\varepsilon$  untuk input elemen lainnya.

Persamaan (4.13) merupakan persamaan implisit dalam  $X$ . Jika dilakukan substitusi secara berulang pada ruas kanan Persamaan (4.13), akan diperoleh

$$\begin{aligned}
X(k) &= A \otimes (A \otimes X(k) \oplus B \otimes X(k-1)) \oplus B \otimes X(k-1) \\
&= A^2 X(k) \oplus ABX(k-1) \oplus BX(k-1)
\end{aligned}$$

setelah  $k$  substitusi diperoleh

$$X(k) = A^k X(k) \oplus (A^{k-1} \oplus A^{k-2} \oplus \dots \oplus A \oplus E)BX(k-1) \quad (4.14)$$



Gambar 4.3: Representasi graph dari matriks 3 *job* 5 mesin

Pada Persamaan (4.14),  $E$  menyatakan matriks identitas, bernilai  $e$  pada diagonal dan  $\varepsilon$  untuk yang lain.  $A^k$  menunjukkan bobot dari lintasan dengan panjang  $k$  pada graph.

Dapat dilihat pada graph yang diberikan oleh Gambar (4.3), bahwa matriks  $A$  tidak mempunyai sirkuit. Berdasarkan Teorema (2.1.3), apabila graf  $\mathcal{G}(A)$  tidak memuat satupun sirkuit maka nilai  $A^{\otimes k} = \varepsilon(n, n) \forall k \geq n$ . Sehingga Persamaan (4.14) menjadi

$$\begin{aligned}
X(k) &= \varepsilon(n, n) \otimes X(k) \oplus (A^{k-1} \oplus A^{k-2} \oplus \dots \oplus A \oplus E) \\
&\quad \otimes BX(k-1) \\
X(k) &= (A^{k-1} \oplus A^{k-2} \oplus \dots \oplus A \oplus E) \otimes BX(k-1) \\
X(k) &= A^* BX(k-1) \quad (4.15)
\end{aligned}$$

dengan demikian, diperoleh model dinamik dalam  $x$  yaitu  $X(k) = MX(k-1)$  dengan  $M = A^*B$

**Contoh 4.1**

Misalkan terdapat 3 *job*,  $J_1, J_2$ , dan  $J_3$ , dengan  $J_1$  merupakan pembuatan kusen,  $J_2$  merupakan pembuatan jendela, dan  $J_3$  merupakan pembuatan pintu. Ketiga *job* tersebut akan diproses pada 5 Mesin,  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ , dengan  $M_1$  adalah mesin pemotong kayu,  $M_2$  adalah mesin penghalus kayu,  $M_3$  adalah mesin pemprofil kayu,  $M_4$  adalah mesin pembuat lubang, serta  $M_5$  merupakan perakitan. Jika diberikan waktu pemrosesan masing - masing sebagai berikut:

Tabel 4.2: Contoh kasus waktu pemrosesan 3 *job* pada 5 mesin

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$
$J_1$	10	50	10	0	40
$J_2$	10	15	5	5	25
$J_3$	15	35	20	20	30

Dari Tabel 4.2 diatas, didapat matriks *job* untuk  $J_1, J_2$ , dan  $J_3$ , yaitu :

$$M(J_1) = \begin{pmatrix} 10 & 60 & 70 & 70 & 110 \\ \varepsilon & 50 & 60 & 60 & 100 \\ \varepsilon & \varepsilon & 10 & 10 & 50 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 40 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 40 \end{pmatrix}$$

$$M(J_2) = \begin{pmatrix} 10 & 25 & 30 & 35 & 60 \\ \varepsilon & 15 & 20 & 25 & 50 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & 10 & 35 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 30 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 \end{pmatrix}$$

$$M(J_3) = \begin{pmatrix} 15 & 50 & 70 & 90 & 120 \\ \varepsilon & 35 & 55 & 75 & 105 \\ \varepsilon & \varepsilon & 20 & 40 & 70 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 & 50 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 \end{pmatrix}$$

Kemudian diurutkan matriks *job* di atas dengan menggunakan algoritma branch dan bound seperti yang dijelaskan di atas.

1. Cabang *node* tingkat pertama, terdapat 3 cabang *node*  $\{s_1, s_2, s_3\}$

$$\begin{aligned} s_1 &= (\varsigma(s_1), \Omega_{s_1}, LB) \\ \varsigma(s_1) &= \{M(J_1)\}; \Omega_{s_1} = \{M(J_2), M(J_3)\}; LB = 110 \\ s_2 &= (\varsigma(s_2), \Omega_{s_2}, LB) \\ \varsigma(s_2) &= \{M(J_2)\}; \Omega_{s_2} = \{M(J_1), M(J_3)\}; LB = 60 \\ s_3 &= (\varsigma(s_3), \Omega_{s_3}, LB) \\ \varsigma(s_3) &= \{M(J_3)\}; \Omega_{s_3} = \{M(J_1), M(J_2)\}; LB = 120 \end{aligned}$$

2. Urutan dari LB terkecil hingga terbesar,  $\{s_2, s_1, s_3\}$
3. Dibangun kembali cabang *node* dari  $s_2$ , yaitu  $s_{2,1}$  dan  $s_{2,3}$

$$\begin{aligned} s_{2,1} &= (\varsigma(s_{2,1}), \Omega_{s_{2,1}}, LB) \\ \varsigma(s_{2,1}) &= \{M(J_2), M(J_1)\}; \Omega_{s_{2,1}} = \{M(J_3)\}; LB = 120 \\ s_{2,3} &= (\varsigma(s_{2,3}), \Omega_{s_{2,3}}, LB) \\ \varsigma(s_{2,3}) &= \{M(J_2), M(J_3)\}; \Omega_{s_{2,3}} = \{M(J_1)\}; LB = 130 \end{aligned}$$

4. Urutan dari LB terkecil hingga terbesar,  $\{s_1, s_3, s_2, 1, s_2, 3\}$



5. Dibangun kembali cabang *node* dari  $s_1$ , yaitu  $s_{1,2}$  dan  $s_{1,3}$

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= (\varsigma(s_{1,2}), \Omega_{s_{1,2}}, LB) \\ \varsigma(s_{1,2}) &= \{M(J_1), M(J_2)\}; \Omega_{s_{1,2}} = \{M(J_3)\}; LB = 135 \\ s_{1,3} &= (\varsigma(s_{1,3}), \Omega_{s_{1,3}}, LB) \\ \varsigma(s_{1,3}) &= \{M(J_1), M(J_3)\}; \Omega_{s_{1,3}} = \{M(J_2)\}; LB = 140 \end{aligned}$$

6. Urutan dari LB terkecil hingga terbesar,  $\{s_3, s_{2,1}, s_{2,3}, s_{1,2}, s_{1,3}\}$

7. Dibangun kembali cabang *node* dari  $s_3$ , yaitu  $s_{3,1}$  dan  $s_{3,2}$

$$\begin{aligned} s_{3,1} &= (\varsigma(s_{3,1}), \Omega_{s_{3,1}}, LB) \\ \varsigma(s_{3,1}) &= \{M(J_3), M(J_1)\}; \Omega_{s_{3,1}} = \{M(J_2)\}; LB = 160 \\ s_{3,2} &= (\varsigma(s_{3,2}), \Omega_{s_{3,2}}, LB) \\ \varsigma(s_{3,2}) &= \{M(J_3), M(J_2)\}; \Omega_{s_{3,2}} = \{M(J_{3,2})\}; LB = 145 \end{aligned}$$

8. Urutan dari LB terkecil hingga terbesar,  $\{s_{2,1}, s_{2,3}, s_{1,2}, s_{1,3}, s_{3,2}, s_{3,1}\}$

9. Dibangun kembali cabang *node* dari  $s_{2,1}$ , yaitu  $s_{2,1,3}$

$$\begin{aligned} s_{2,1,3} &= (\varsigma(s_{2,1,3}), \Omega_{s_{2,1,3}}, LB) \\ \varsigma(s_{2,1,3}) &= \{M(J_2), M(J_1), M(J_3)\}; \Omega_{s_{2,1,3}} = \{\} \end{aligned}$$

Karena  $s_{2,1,3}$  merupakan akar *node*, maka hitung nilai batas atas, yaitu 180

10. Kemudian buat cabang dari  $s_{2,3}$ , yaitu  $s_{2,3,1}$   
Hitung batas atas kembali, batas atas dari  $s_{2,3,1}$  adalah 170; karena  $170 < 180$  nilai batas atas diperbarui menjadi 170

11. Buat kembali cabang *node* dari  $s_{1,2}$ , yaitu  $s_{1,2,3}$ . Hitung batas atas, didapat nilainya 180, karena  $180 > 170$ , nilai batas atas masih tetap 170.
12. Dibangun kembali cabang *node* dari  $s_{1,3}$ , yaitu  $s_{1,3,2}$ . Hitung batas atas, didapat nilainya 190, karena  $190 > 170$ , nilai batas atas masih tetap 170.
13. Dibangun kembali cabang *node* dari  $s_{3,2}$ , yaitu  $s_{3,2,1}$ . Hitung batas atas, didapat nilainya 185, karena  $185 > 170$ , nilai batas atas masih tetap 170.
14. Dibangun kembali cabang *node* dari  $s_{3,1}$ , yaitu  $s_{3,1,2}$ . Hitung batas atas, didapat nilainya 185, karena  $185 > 170$ , nilai batas atas masih tetap 170.
15. Sehingga permutasi optimalnya adalah  $s_{2,3,1}$  dengan *makespan* 170 satuan waktu.

Setelah didapatkan urutan optimalnya, selanjutnya dibuat jadwal pemrosesannya dengan menggunakan Aljabar max-Plus. Dimana  $J'_1 = J_2$ ;  $J'_2 = J_3$  dan  $J'_3 = J_1$  dan  $x_{m,n}(k)$  adalah waktu mulainya proses  $J'_m$  pada  $M_n$  pada periode ke- $k$ . Berdasarkan model dinamik,  $X(k) = AX(k) \oplus BX(k-1)$  dengan

[illegible]

dan matriks B adalah matriks persegi berukuran  $15 \times 15$  dengan input elemen - elemennya adalah  $[B]_{1,11} = 10; [B]_{2,12} = 50; [B]_{3,13} = 10; [B]_{4,14} = 0; [B]_{5,15} = 40$  dan  $\varepsilon$  untuk input elemen lainnya.

Selanjutnya dengan menggunakan scilab, didapat nilai dari  $A^*$ , yaitu



Masih dengan menggunakan scilab, dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks transisi, ternyata, matriks transisi  $M$  tidak mempunyai nilai eigen yang tunggal. Selanjutnya dicari eigenmode tergeneralisasi dari matriks transisi  $M$  yang merupakan perluasan nilai eigen dari matriks  $M$  dengan menggunakan algoritma 2.1.1 , didapat :

$$\eta = \begin{pmatrix} 35 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 35 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 35 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \text{dan } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 25 \\ 30 \\ 70 \\ 10 \\ 25 \\ 60 \\ 80 \\ 100 \\ 25 \\ 60 \\ 110 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa waktu pemrosesan setiap *job* di mesin 1 periodik setiap 35 menit sekali dan pemrosesan *job* di mesin lainnya periodik setiap 100 menit sekali. Kemudian didapat iterasi vektor keadaan  $X(k)$  yaitu :

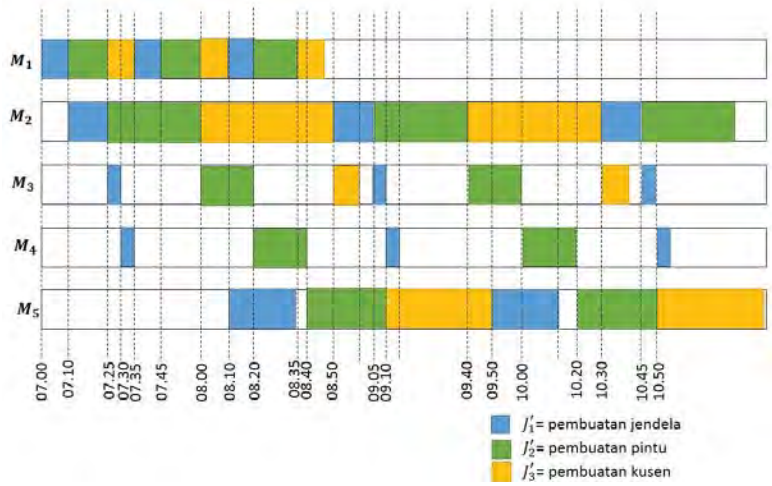
$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 25 \\ 30 \\ 70 \\ 10 \\ 25 \\ 60 \\ 80 \\ 100 \\ 25 \\ 60 \\ 110 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix} ; X(1) = \begin{pmatrix} 35 \\ 110 \\ 125 \\ 130 \\ 170 \\ 45 \\ 125 \\ 160 \\ 180 \\ 200 \\ 60 \\ 160 \\ 210 \\ 220 \\ 230 \end{pmatrix} ; X(2) = \begin{pmatrix} 70 \\ 210 \\ 225 \\ 230 \\ 270 \\ 80 \\ 225 \\ 260 \\ 280 \\ 300 \\ 95 \\ 260 \\ 310 \\ 320 \\ 330 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Selanjutnya akan dibuat jadwal reguler dari waktu mulainya pemrosesan 3 *job* pada 5 mesin. Jika dimisalkan waktu awal pemrosesan *job* pertama pada mesin pertama adalah pukul 07.00, berdasarkan Persamaan (4.15), maka waktu awal pemrosesan *job* pertama pada mesin kedua adalah 10 menit kemudian, yaitu pada pukul 07.10. Dengan cara yang sama akan disusun jadwal pemrosesan 3 *job* pada 5 mesin dengan waktu seperti pada Contoh (4.1), yaitu sebagai berikut:

Tabel 4.3: Jadwal Mulainya Pemrosesan Job pada Contoh 4.1 Menggunakan (4.15) untuk 3 Siklus Produksi

		$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$
1	$J'_1$	07.00	07.10	07.25	07.30	08.10
	$J'_2$	07.10	07.25	08.00	08.20	08.40
	$J'_3$	07.25	08.00	08.50	-	09.10
2	$J'_1$	07.35	08.50	09.05	09.10	09.50
	$J'_2$	07.45	09.05	09.40	10.00	10.20
	$J'_3$	08.00	09.40	10.30	-	10.50
3	$J'_1$	08.10	10.30	10.45	10.50	11.30
	$J'_2$	08.20	10.45	11.20	11.40	12.00
	$J'_3$	08.35	11.20	12.10	-	12.30

Pada Tabel (4.2) terlihat bahwa sistem akan berulang setiap 35 menit pada mesin 1 dan 100 menit pada mesin lainnya dengan *makespan* 170. Berikut ini akan ditampilkan *gant chart* dari jadwal yang telah disusun untuk mempermudah *visualisasi* jadwal.



Gambar 4.4: Gant Chart jadwal produksi 3 job 5 mesin pada Contoh 4.1



## BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada Bab IV, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

- a. Pada problem  $F5|pmu|C_{max}$ , urutan job yang mempunyai makespan minimum dapat ditentukan dengan menggunakan Algoritma Branch and Bound. Sedangkan besarnya makespan dari urutan job yang telah diperoleh dapat dihitung dengan menggunakan persamaan

$$C(\sigma) = (e \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon) \otimes M(\sigma)$$

dengan *completion time* (waktu selesainya pemrosesan seluruh job satu kali proses) bergantung pada nilai dari elemen pada baris ke - 1 dan kolom ke - 5 dari matriks permutasi job.

- b. Konstruksi model aliran produksi flowshop 3 job 5 mesin, yaitu

$$X(k+1) = A \otimes X(k+1) \oplus B \otimes X(k)$$

sedangkan model dinamikanya adalah

$$X(k) = MX(k-1)$$

dimana  $M$  merupakan matriks transisi yang selanjutnya dicari nilai eigen dan vektor eigennya, yang dalam studi kasus di UKM Rizki Makmur tidak ditemukan nilai eigen yang tunggal, sehingga perlu dicari eigenmode tergeneralisasi untuk menentukan jadwal reguler dari sistem penjadwalan yang diberikan.

## 5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini belum dibahas mengenai penjadwalan flowshop  $n$  job pada  $m$  mesin secara umum. Oleh sebab itu, penulis menyarankan agar penelitian dapat dilanjutkan pada pembahasan tersebut.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Subiono. (2015). **Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya**. Buku Ajar Kuliah Pilihan Pasca Sarjana Matematika, ITS, Surabaya.
- [2] Murata, T. (1989). **Petri Nets: Properties, Analysis and Applications**. Proceeding of the IEEE, Vol. 77, No.4.
- [3] Masruroh, Nisa.(2009). **Analisa Penjadwalan Produksi dengan Menggunakan Metode Ampbell Dudeck Smith, Palmer, dan Dannenbring di PT.Loka Refraktoritis Surabaya**. Skripsi S1, FTI-UPN Veteran, Jatim.
- [4] Usadha, I Gusti Ngurah Rai. (2013). **Pemodelan Petri Nets pada Keandalan Sistem dan Sistem Produksi**. ITS, Surabaya.
- [5] Shofianah, Nur. (2014). **Using Max-Plus Algebra in the Flow Shop Scheduling**. Thesis Magister, ITS, Surabaya.
- [6] Saidah, Nafiuna Hidayatus.(2010).**Implementasi Algoritma Optimasi Bee Colony untuk Penjadwalan Job Shop**. Tugas Akhir S1, ITS, Surabaya.
- [7] Bause, Falko. (2002).**Stochastic Petri Nets, An Introduction to the Theory**.Vieweg, Germany.

- [8] Lely, Herlina.(2014).**Penjadwalan Produk Painted di PT. X dengan Algoritma Branch and Bound untuk Meminimasi Mean Flow Time.** Skripsi S1, Universitas Muhammadiyah Surakarta, Surakarta.
- [9] Naftali, Tirza.(2007).**Penjadwalan produksi flow-shop dengan metode algoritma tabu search pada PT. X.**Skripsi S1, Universitas Indoensia, Depok.
- [10] Imamah, Nurul.(2011).**Penerapan Algoritma Modified Ant Colony pada Penjadwalan Produksi Baja.**Tugas Akhir S1, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [11] J.-L. Bouquard. (2006).**Application of an optimization problem in Max-Plus algebra to scheduling problems.**Science Direct,France.

## LAMPIRAN A

### Biodata Penulis



Penulis bernama Susi Yanuarsih, lahir di Cirebon, 04 Januari 1994. Penulis merupakan anak terakhir dari pasangan Mundihab dan Atik Sartika. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari SDN 122363 Pematang Siantar (1999-2004), SDN 1 Bulak, Cirebon (2004-2005) SMP Negeri Arjawinangun (2005-2008), dan SMA Negeri 1 Cisarua (2008-2011). Setelah lulus dari SMA, pada tahun 2011 penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya melalui jalur SNMPTN tertulis dengan NRP 1211 100 096. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Analisis dan Aljabar. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di KM ITS melalui HIMATIKA ITS sebagai staf Depart. Sainstek (2012-2013), LDJ Ibnu Muqhlah Matematika ITS sebagai ketua keputrian (2012-2013) dan sekretaris departemen Kaderisasi (2013-2014), serta JMMI ITS sebagai koordinator putri divisi Keilmuan Departemen Syiar (2012-2013) dan Koordinator putri Departemen Keilmuan (2014-2015) Disamping itu, sejak semester 5 penulis dipercaya menjadi asisten dosen matakuliah kalkulus I dan kalkulus II.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: [susi.yanuarsih@gmail.com](mailto:susi.yanuarsih@gmail.com)